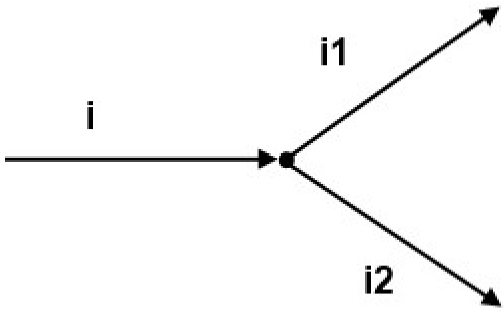
Расчет цепей постоянного тока

Для расчета цепей постоянного тока необходимо знания закона Ома для всей цепи и ее участков, первого и второго законов Кирхгофа и методики определения эквивалентного сопротивления цепи. Законы Ома были изучены в предыдущей теме. Познакомимся с законами Кирхгофа.

Законы Кирхгофа – правила, которые показывают, как соотносятся токи и напряжения в электрических цепях.

Первый закон Кирхгофа – *алгебраическая сумма токов сходящихся в узле равна нулю.*



$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

На рисунке видно, что ток I входит в узел, а из узла выходят токи I1 и I2. Составляем выражение по первому закона Кирхгофа, учитывая, что токи, входящие в узел, имеют знак плюс, а токи, исходящие из узла - имеют знак минус I1-I2-I3=0. Ток I как бы растекается на два тока поменьше и равен сумме токов I1 и I2. Если преобразовать это выражение, то получается I=I1+I2. Сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла – это следствие первого закона Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа – *алгебраическая сумма ЭДС, действующая в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения в этом контуре.*

$$\sum_{l=1}^{n} E_l = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k$$

Напряжение выражено как произведение тока на сопротивление (по закону Ома).

Расчет электрической цепи методом эквивалентных преобразований

Этот метод применяется при расчете простых цепей постоянного тока. Путем эквивалентных преобразований цепи получают неразветвленную цепь, содержащую источник ЭДС и приемник с эквивалентным сопротивлением.

По закону Ома для полной цепи вычисляют ток в неразветвленной части цепи. Затем находят распределение этого тока по отдельным ветвям.

Правила замены схем эквивалентными приведены в табл. 1. После каждого этапа преобразования рекомендуется заново начертить цепь с учетом выполненных преобразований (см. табл. 2).

Таблица 1 – Эквивалентные преобразования простейших электрических цепей

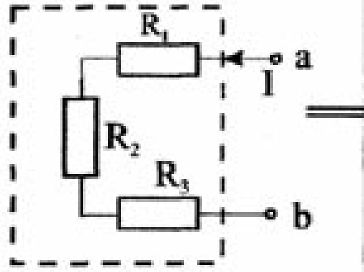
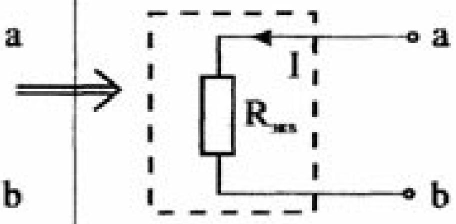
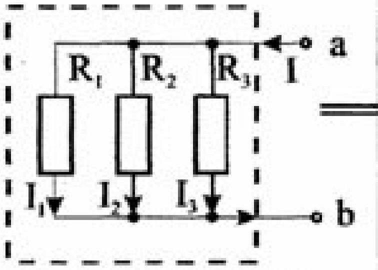
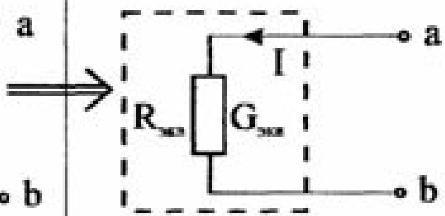
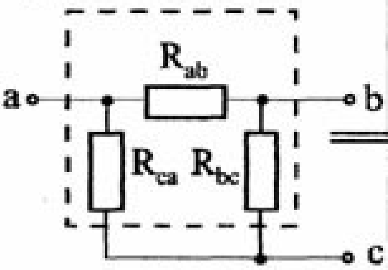
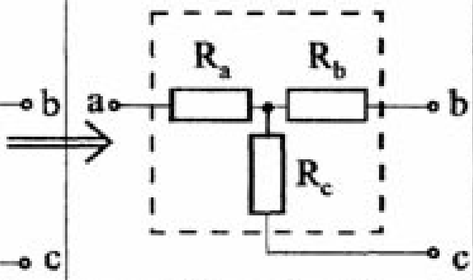
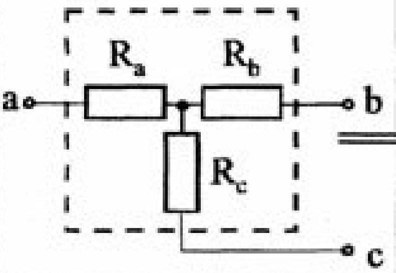
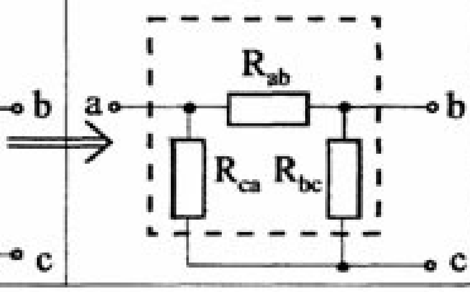
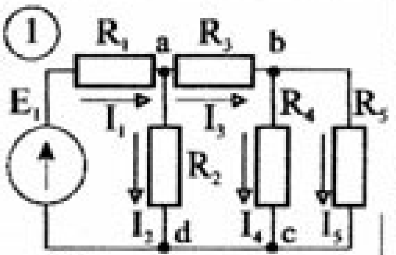
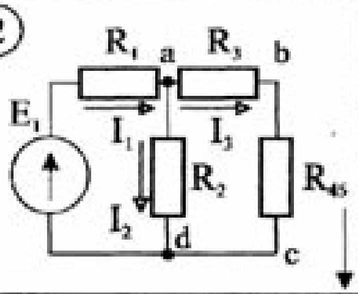
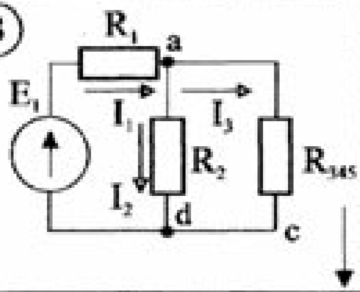
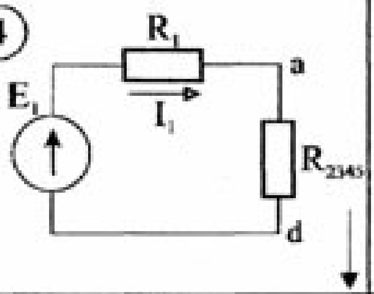
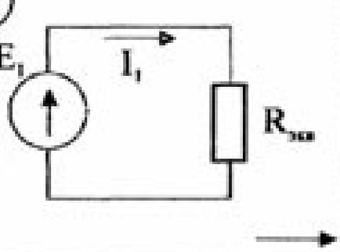
Исходная электрическая цепь	Эквивалентная схема преобразования	Формулы эквивалентного преобразования
Последовательное соединение 		$R_{экв} = R_1 + R_2 + R_3$ $I = const$ $U_{ab} = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3}$
Параллельное соединение 		$G_{экв} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$; $R_{экв} = \frac{1}{G_{экв}}$; $R_{экв} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$; $I = I_1 + I_2 + I_3$.$U = const$
Соединение элементов треугольником 	Эквивалентное соединение звездой 	$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$; $R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$; $R_c = \frac{R_{bc} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$.
Соединение элементов звездой 	Эквивалентное соединение треугольником 	$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}$; $R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}$; $R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}$.

Таблица 2 – Расчет электрической цепи методом эквивалентных преобразований

Этапы расчета	Формулы для расчета сопротивлений	Формулы для расчета тока
1  Исходная схема		10 $I_4=\frac{U_{bc}}{R_4}$ $I_5=\frac{U_{bc}}{R_5}$ Последний этап расчета
2 	$R_{45}=\frac{R_4\,R_5}{R_4+R_5}$	9 $U_{bc}=R_{45}\,I_3=U_{ad}-R_3I_3$
3 	$R_{345}=R_3+R_{45}$	8 $I_2=\frac{U_{ad}}{R_2}$ $I_3=\frac{U_{ad}}{R_{345}}=I_1-I_2$
4 	$R_{2345}=\frac{R_2\,R_{345}}{R_2+R_{345}}$	7 $U_{ad}=R_{2345}\,I_1$
5 	$R_{экв}=R_1+R_{2345}$	6 $I_1=\frac{E_1}{R_{экв}}$

Для сложных цепей, содержащих несколько источников, применяются методы, основанные на законах Ома и Кирхгофа. Рассмотрим эти методы.

Расчет электрической цепи по законам Кирхгофа

Расчет многоконтурной линейной электрической цепи, имеющей «b» ветвей с активными и пассивными элементами и «у» узлов, сводится к определению токов отдельных ветвей и напряжений на зажимах элементов, входящих в данную цепь.

Пассивной называется ветвь, не содержащая источника ЭДС. Ветвь, содержащая источник ЭДС, называется активной.

Расчет сводится к решению системы уравнений, количество которых равно числу токов в цепи и ли числу контуров b/

1-й закон Кирхгофа применяют к независимым узлам, т.е. таким, которые отличаются друг от друга хотя бы одной новой ветвью, что позволяет получить (у — I) уравнений.

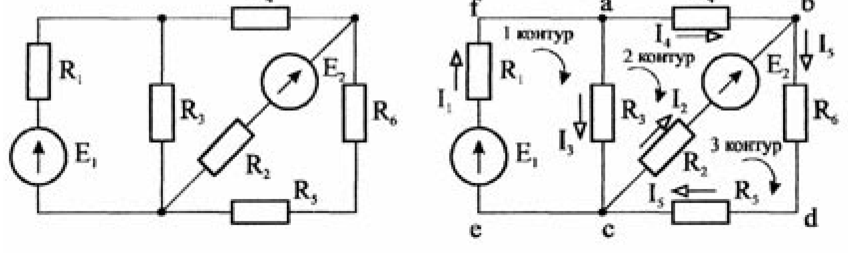
Недостающие уравнения в количестве b — (у — I) составляют, исходя из второго закона Кирхгофа. Уравнение записывают для независимых контуров, которые отличаются один от другого, по крайней мере, одной ветвью.

Порядок выполнения расчета:

1) выделяют в электрической цепи ветви, независимые узлы и контуры;
2) с помощью стрелок указывают произвольно выбранные положительные направления токов в отдельных ветвях, а также указывают произвольно выбранное направление обхода контура;
3) составляют уравнения по законам Кирхгофа, применяя следующее правило знаков:
   - токи, направленные к узлу цепи, записывают со знаком «плюс», а токи, направленные от узла,- со знаком «минус» (для первого закона Кирхгофа);
   - ЭДС и напряжение на резистивном элементе (R_I) берутся со знаком «плюс», если направления ЭДС и тока в ветви совпадают с направлением обхода контура, а при встречном направлении — со знаком «минус»;
4) решая систему уравнений, находят токи в ветвях. При решении могут быть использованы ЭВМ, методы подстановки или определителей.

Отрицательные значения тока какой-либо ветви указывают на то, что выбранные ранее произвольные направления тока оказались ошибочными. Это следует учитывать, например, при построении потенциальной диаграммы, где следует знать истинное направление тока.

На рис. 1, а изображена исходная электрическая схема, для которой следует рассчитать токи в ветвях. Направления токов и обхода контуров приведены на рис. 1, б.



а) б)

Рисунок 1 – Пример применения метода для расчета сложных цепей

Система уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, имеет вид

для узла a: $I_1 - I_3 - I_4 = 0$

для узла b: $I_2 + I_4 - I_5 = 0$

для контура acef: $R_1I_1 + R_3I_3 = E_1$

для контура abc: $-R_2I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 = -E_2$

для контура bdc: $R_2I_2 + R_5 I_5 + R_6I_5 = E_2$

Расчет электрической цепи методом контурных токов

При расчете цепи методом контурных токов вводится понятие фиктивных токов, которые не протекают в реально существующей цепи. Рассмотрим схему на рис. 2

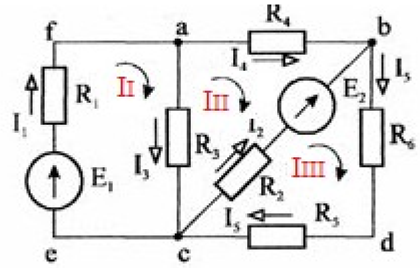


Рисунок 2 – Схема для расчета методом контурных токов

При расчете рекомендуется следующая последовательность действий:

1) находят в цепи ветви, узлы и контуры;
2) указывают произвольные направления действительных токов в ветвях;
3) произвольно выбирают направления контурных токов;
4) выражают действительные токи через контурные;
5) для независимых контуров составляют уравнения по второму закону Кирхгофа относительно неизвестных контурных токов I_I, I_{II}, I_{III}.

Токи в ветвях определяют алгебраическим суммированием контурных токов, протекающих через ту или иную ветвь. Контурный ток берется со знаком «плюс», если его направление совпадает с направлением тока ветви, и со знаком «минус» — при встречном направлении.

$I_1 = I_I$ $\quad I_2 = I_{II} - I_{III}$ $\quad I_3 = I_{II} - I_I$ $\quad I_4 = I_{II}$ $\quad I_5 = I_{III}$

Для рассчитываемой электрической цепи система уравнений будет иметь вид:

для контура acef: $(R_1 + R_3)\ I_I – R3\ I_{II} = E_1$

для контура abc: $(R_2 + R_3 + R_4)\ I_{II} - R_3I_I - R_2\ I_{III} = -E_2$

для контура bdc: $(R_2 + R_5 + R_6)\ I_{III} - R3I_{II} = E_2$

В рассматриваемом примере при составлении уравнений принято во внимание то, что вторая (R_2, E_2) и третья (Rз) ветви электрической цепи являются смежными и по ним протекают два контурных тока, каждый из которых обусловливает на резисторе смежной ветви падение напряжения, например, R_2I_{II} и R_2I_{III} (для токов второй ветви).

Расчет электрической цепи методом наложения

Метод наложения основан на принципе суперпозиции, согласно которому ток в любой ветви сложной схемы равен алгебраической сумме частичных токов, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности.

По методу наложения рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно удаляя остальные ЭДС из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников. Затем находят токи в ветвях исходной схемы путем алгебраического сложения частичных токов.

Порядок выполнения расчета рассмотрим на примере схемы, показанной на рис. 3, а.

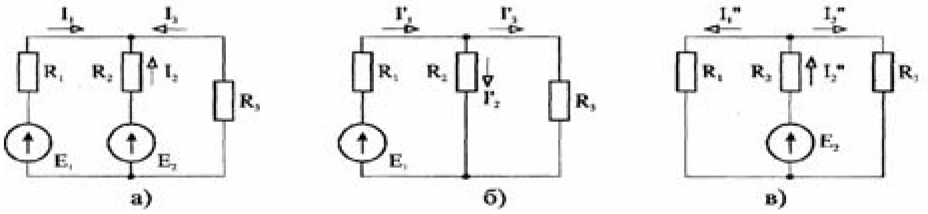


Рисунок 3 – Схема для расчета методом наложения

Определяют частичные токи I_1‘, I_2‘ и I_3‘ в ветвях электрической цепи при действии одной ЭДС E_1 (ЭДС E_2 исключена из цепи) (рис. 3, б). Направление частичных токов задают в соответствии с направлением ЭДС, расчет токов ведут с использованием метода эквивалентных преобразований.

Определяют частичные токи I_1'', I_2'' и I_3'' при действии ЭДС E_2 (рис.3, в). (ЭДС E_1 исключена из цепи).

Определяют реальные токи I1, I2 и I3 в ветвях исходной цепи (рис.6, а) как алгебраическую сумму частичных токов при мысленном совмещении цепей, изображенных на рис. 3, б и 3, в.

$$I_1 = I_1' - I_1'' \qquad I_2 = I_2'' - I_2' \qquad I_3 = -I_3' - I_3''.$$

Частичный ток берется со знаком «плюс», если его направление совпадает с направлением реального тока в исходной цепи, со знаком «минус» — при встречном направлении.

Метод двух узлов

Этот метод применяется для расчета электрических цепей с двумя узлами, между которыми включены активные и пассивные цепи (см. рис4).

Положительные направления токов в ветвях выберем от узла а к узлу в.

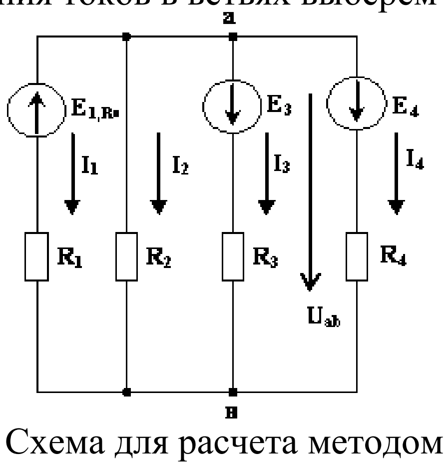


Рисунок 4 – Схема для расчета методом двух узлов

Вначале по формуле рассчитывается узловое напряжение Uab, а затем по закону Ома рассчитываются токи в ветвях. Принимаем положительное направление напряжения Uab от узла а к узлу в

$$U_{ab} = \frac{E_1 G_1 - E_3 G_3 - E_4 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4},$$

где G1, G2, G3, G4— проводимости ветвей

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + r_0};\quad G_2 = \frac{1}{R_2};\quad G_3 = \frac{1}{R_3};\quad G_4 = \frac{1}{R_4}$$

Если ЭДС в ветви направлена навстречу узловому напряжению Uaв, то произведение EG записывается со знаком (+), если согласно – со знаком (-), независимо от положительных направлений токов. Если в ветви нет ЭДС, то произведение EG=0.

Токи в ветвях определяются по формулам:

$$I_1=(U_{ав}-E_1)G_1; \quad I_2=U_{ав}\times G_2=\frac{U_{ав}}{R_2}$$

$$I_3=(U_{ав}+E_3)G_3; \quad I_4=(U_{ав}+E_4)G_4$$

Рассмотрим вывод формулы для расчета тока I_3

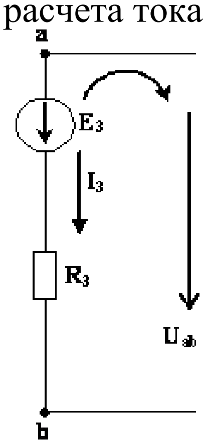


Рисунок 5 – Схема для расчета тока I_3

Для изображенного контура составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$U_{ав} - R_3 I_3 = -E_3$$

$$\mathbf{I_3 = \frac{U_{ав} + E_3}{R_3} = (U_{ав} + E_3)\cdot G_3}$$

Метод эквивалентного генератора.

Этот метод основан на теореме *любой активный двухполюсник может быть заменен эквивалентным генератором, ЭДС которого ЕЭ равна напряжению холостого хода двухполюсника, а внутреннее сопротивление RЭ напряжению холостого хода, деленному на ток короткого замыкания* и применяется в тех случаях, когда требуется рассчитать ток в какой-либо одной ветви при нескольких значениях ее параметров (сопротивления и ЭДС) и неизменных параметрах всей остальной цепи.

Сущность метода заключается в следующем. Вся цепь относительно зажимов интересующей нас ветви представляется как активный двухполюсник, который заменяется эквивалентным генератором, к зажимам которого подключается интересующая нас ветвь. В итоге получается простая неразветвленная цепь, ток в которой определяется по закону Ома.

ЭДС $E_Э$ эквивалентного генератора и его внутреннее сопротивление $R_Э$ находятся из режимов холостого хода и короткого замыкания двухполюсника.

Порядок решения задачи этим методом рассмотрим на конкретном числовом примере.

Пример 1.5. В цепи, показанной на рис. 6, а, требуется рассчитать ток I_3 при шести различных значениях сопротивления R_3 и по результатам расчета построить график зависимости $I_3(R_3)$.

Числовые значения параметров цепи: E1 = 225 В; E3 = 30 В; R1 = 3 Ом; R2 = 6 Ом.

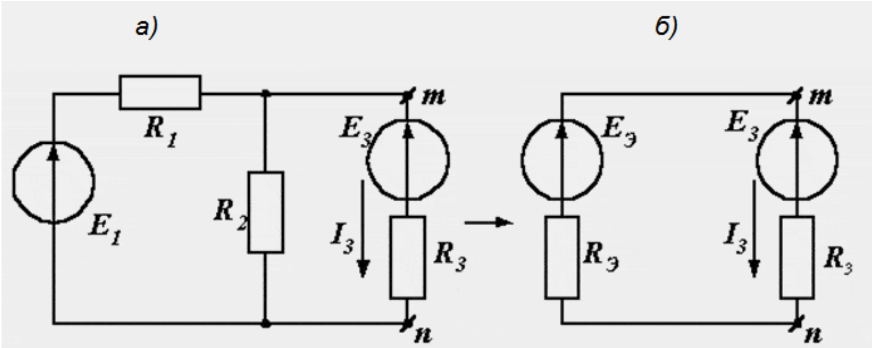


Рисунок 6 - Схема решения задачи

Р е ш е н и е.

а) Расчет режима холостого хода.

Убираем третью ветвь, оставляя зажимы m и n разомкнутыми (рис. 6, а). Напряжение между ними, равное UX, находится как падение напряжения на сопротивлении R2:

$$U_X = I_X R_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} R_2 = 150 \text{ В}; \qquad E_Э = U_X = 150 \text{ В}.$$

б) Расчет режима короткого замыкания. Замыкаем накоротко зажимы m и n (рис. 6, б). Ток короткого замыкания: Ik=E1/R1=75 (А)

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора: Rэ=Ux/Ik=2 (Ом).

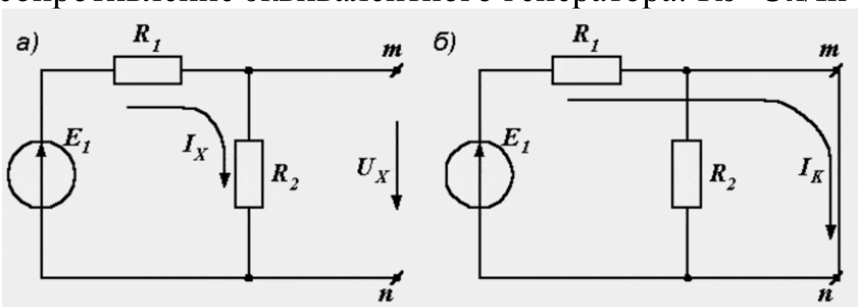


Рисунок 7 - Режимы холостого хода (а) и короткого замыкания (б)

Величину Rэ можно найти и другим способом. Оно равно входному сопротивлению двухполюсника при равенстве нулю всех его ЭДС. Если на рис. 7, б, мысленно закоротить зажимы ЭДС E1, то сопротивления R1 и R2 окажутся соединенными параллельно, и входное сопротивление цепи относительно зажимов m и n будет равно:

$$R_{BX} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 \text{ Ом}.$$

Ток в полученной неразветвленной цепи (рис. 9.1, б) определяется по закону Ома:

$$I_3 = \frac{E_Э - E_3}{R_Э + R_3} = \frac{150 - 30}{2 + R_3} = \frac{120}{2 + R_3}.$$

Подставляя в последнюю формулу требуемые значения сопротивления R3, вычисляем ток и строим график (рис. 8).

$R_э$, Ом	0	2	4	6	8	10
$I_э$, A	60	30	20	15	12	10

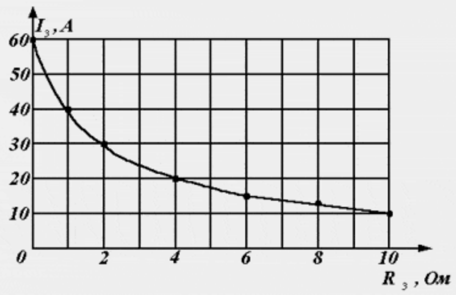


Рисунок 8 - Зависимость тока от сопротивления

Данную задачу целесообразно решать именно методом эквивалентного генератора. Применение другого метода, например метода контурных токов, потребует решать систему уравнений столько раз, сколько значений тока необходимо найти. Здесь же всю цепь мы рассчитываем только два раза, определяя Еэ и Rэ, а многократно используем лишь одну простую формулу.

Баланс мощности электрической цепи

Баланс мощности цепи составляют для проверки расчетов и записывают в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k I_k = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k$$

где $E_к$, I_k и R_k –значения ЭДС источника, тока и сопротивления к–ой ветви;

n–число ветвей, содержащих источники ЭДС;

m– число ветвей электрической цепи.

Баланс мощностей можно сформулировать так: сумма мощностей приемников равна сумме мощностей источников энергии.

В уравнении баланса произведение $E_k I_k$ (мощность источника) подставляют со знаком «плюс», если истинное направление тока, протекающего через источник, и направление ЭДС источника совпадают, и со знаком «минус» – при встречном направлении (источник работает в режиме приемника).

Для электрической цепи, представленной на рис. 1б, уравнение баланса мощностей будет иметь вид (при положительных значениях расчетных токов):

$E_1 I_1 – E_2 I_2 = I_1^2 R1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 (R_5 + R_6)$.

Расчет потенциальной диаграммы

Потенциальной диаграммой называется графическое изображение распределения электрического потенциала вдоль замкнутого контура в зависимости от сопротивления участков, входящих в выбранный контур.

Для построения потенциальной диаграммы выбирают замкнутый контур. Этот контур разбивают на участки таким образом, чтобы на участке находился один потребитель или источник энергии. Пограничные точки между участками необходимо обозначить буквами или цифрами.

Произвольно заземляют одну точку контура, её потенциал условно считается нулевым. Обходя контур по часовой стрелке от точки с нулевым потенциалом, определяют потенциал каждой последующей пограничной точки как алгебраической суммы потенциала предыдущей точки и изменения потенциала между этими соседними точками.

Изменение потенциала на участке зависит от состава цепи между точками. Если на участке включен потребитель энергии (резистор), то изменение потенциала численно равно падению напряжения на этом резисторе. Знак этого изменения определяют направлением тока. При совпадении направлений тока и обхода контура знак «минус», в противном случае он «плюс».

Если на участке находится источник ЭДС, то изменение потенциала здесь численно равно величине ЭДС данного источника. При совпадении направления обхода контура и направления ЭДС изменение потенциала положительно, в противном случае оно отрицательно.

После расчета потенциалов всех точек строят в прямоугольной системе координат потенциальную диаграмму. На оси абсцисс откладывают в масштабе сопротивление участков в той последовательности, в которой они встречались при обходе контура, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек. Потенциальная диаграмма начинается с нулевого потенциала и заканчивается после обхода контура таковым.

Рассмотрим пример построения потенциальной диаграммы для схемы рис. 6

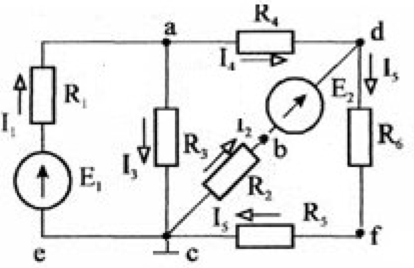


Рисунок 9 – Схема для построения потенциальной диаграммы

Строим потенциальную диаграмму для контура cbdf. Принимаем потенциал точки c равным нулю и обходим контур по часовой стрелке.

$\varphi_b = \varphi_c - I_2R_2$

$\varphi_d = \varphi_b + E_2$

$\varphi_f = \varphi_d - I_5R_6$

$\varphi_c = \varphi_f - I_5R_5 = 0$

Потенциальна диаграмма имеет вид