

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УДМУРТСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Автономное профессиональное образовательное учреждение Удмуртской
Республики «Техникум радиоэлектроники и информационных технологий
имени А.В. Воскресенского»**

**Практические работы
по дисциплине ОП.05 Теория электросвязи**

**Разработал
Преподаватель**

Л.И. Лихачева

2024 год

Практическая работа №1

Расчет энергетических и временных характеристик сигналов

Цель работы – приобретение навыков определения и исследования характеристик сигналов, существенных для их передачи по каналам связи.

Теоретическая часть

Сигнал – это материальный переносчик информации. Детерминированный сигнал $s(t)$ – это сигнал, мгновенные значения которого в любой момент времени известны. Детерминированный сигнал может быть задан в аналитической форме, как функция времени $s(t)$ либо представлен графиком, таблицей, осциллограммой.

Сигнал также является объектом транспортировки от передатчика к приемнику, а техника связи по существу техникой транспортирования (передачи) сигналов по каналам связи. Поэтому, в первую очередь, в лабораторной работе определяются параметры сигнала, которые являются основными с точки зрения его передачи по каналам связи. Такими параметрами являются длительность сигнала T_s , с, ширина спектра ΔF_s , Гц, и его динамический диапазон D_s , дБ.

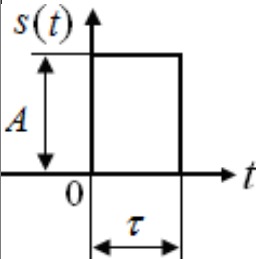
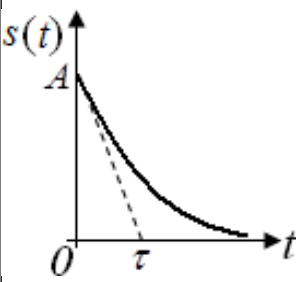
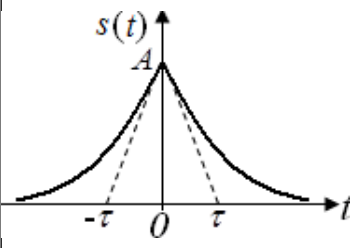
Длительность сигнала T_s , с, – это интервал времени (t_1, t_2) в течение которого сигнал существует (определен):

$$T_s = t_2 - t_1. \quad (1.1)$$

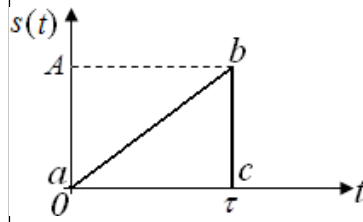
Эта характеристика является одной из основных с точки зрения транспортировки сигнала по каналу связи. Несмотря на то, что на практике сигналы всегда ограничены по времени, наряду с сигналами, задаваемыми на ограниченном интервале времени (t_1, t_2) , рассматриваются сигналы, заданные на полубесконечном $(0, \infty)$ или на бесконечном $(-\infty, \infty)$ интервалах времени. Например, сигналом, заданным на ограниченном интервале времени $(0, \tau)$, является одиночный прямоугольный импульс. К сигналам заданным на полубесконечном $(0, \infty)$ интервале времени относится односторонний

экспоненциальный импульс. Примером сигнала, заданным на бесконечном ($-\infty, \infty$) интервале времени является двусторонний экспоненциальный импульс. Математические модели и параметры перечисленных сигналов приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Название, графическое и аналитическое определение сигналов, исследуемых на лабораторной работе

Название	Графическое определение	Математическая модель в Mathcad и параметры
Прямоугольный импульс	 <p>График показывает сигнал $s(t)$ на вертикальной оси и время t на горизонтальной оси. Сигнал имеет постоянную амплитуду A в интервале от $t=0$ до $t=\tau$, и равен нулю в остальных случаях.</p>	$s(t) := \begin{cases} A & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ <p>Параметры импульса: A – высота прямоугольного импульса; τ – длительность прямоугольного им-пульса. <i>Примечание</i> – Ключевое слово «otherwise» используется в контексте для задания значения сигнала «во всех остальных случаях»</p>
Односторонний экспоненциальный импульс	 <p>График показывает сигнал $s(t)$ на вертикальной оси и время t на горизонтальной оси. Сигнал начинается с амплитуды A при $t=0$ и экспоненциально затухает к нулю по мере увеличения t. Дashed line указывает на время τ, соответствующее значению A/e.</p>	$s(t) := \begin{cases} A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$ <p>Параметры импульса: A – высота одностороннего экспоненциального импульса; τ – постоянная времени одностороннего экспоненциального импульса</p>
Двусторонний экспоненциальный импульс	 <p>График показывает сигнал $s(t)$ на вертикальной оси и время t на горизонтальной оси. Сигнал имеет симметричную форму, пик которой находится в $t=0$ с амплитудой A. Dashed lines указывают на времена $-\tau$ и τ, соответствующие значению A/e.</p>	$s(t) := A \cdot e^{-\frac{ t }{\tau}}$ <p>Параметры импульса: A – высота двустороннего экспоненциального импульса; τ – постоянная времени двустороннего экспоненциального импульса</p>

Пилообразный импульс



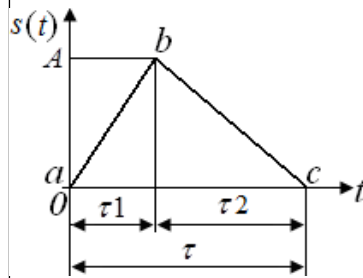
$$s(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau} \right) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{if } t \geq \tau \end{cases}$$

Параметры импульса:

A – высота пилообразного импульса;
 τ – длительность пилообразного импульса.

Примечание – Отрезок ab называется прямым ходом пилообразного импульса, отрезок bc – обратным ходом пилообразного импульса

Треугольный импульс

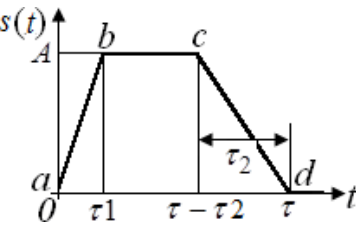
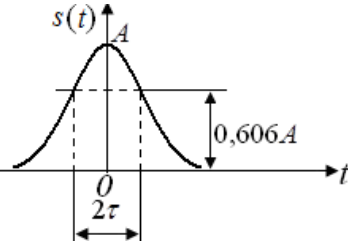
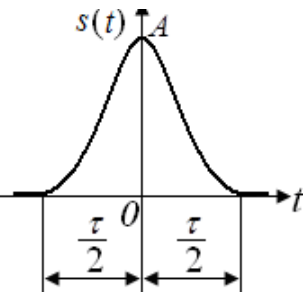


$$s(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau_1} \right) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ \left[A \cdot \left(1 - \frac{t - \tau_1}{\tau_2} \right) \right] & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{if } t > \tau \end{cases}$$

Параметры импульса:

A – высота треугольного импульса;
 τ_1 и τ_2 – длительность фронта и длительность среза треугольного импульса;
 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ – длительность треугольного импульса.

Примечание – Отрезок ab называется фронтом, а отрезок bc – срезом треугольного импульса

Трапецидальный импульс		$s(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \left(A \cdot \frac{t}{\tau_1} \right) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ A & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau - \tau_2 \\ \left[A \cdot \left(1 - \frac{t - \tau + \tau_2}{\tau_2} \right) \right] & \text{if } \tau - \tau_2 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{if } t > \tau \end{cases}$ <p>Параметры импульса: A – высота трапецидального импульса; τ – длительность трапецидального импульса; τ1 – длительность фронта трапецидального импульса; τ2 – длительность среза трапецидального импульса.</p> <p><i>Примечание</i> – Отрезок ab называется фронтом трапецидального импульса, отрезок bc – вершиной трапецидального импульса, отрезок cd – срезом трапецидального импульса</p>
Колоколообразный импульс		$s(t) := A \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{\tau} \right)^2}$ <p>Параметры импульса: A – высота колоколообразного импульса; 2τ – интервал времени между точками перегиба колоколообразного импульса.</p> <p><i>Примечание</i> – Значение параметра 2τK определяется также по уровню 0,606AK.</p>
Косинус-квадратный импульс		$s(t) := \begin{cases} \left(A \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\tau} \cdot t \right) \right)^2 & \text{if } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{if } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ <p>Параметры импульса: A – высота косинус-квадратного импульса; τ – длительность косинус-квадратного импульса.</p> <p><i>Примечание</i> – Значение параметра τ/2 определяется также по уровню 0,5A</p>

Наряду с понятием длительности сигнала широко используется понятие эффективной длительности сигнала T_{SE} , с, – длительность интервала времени, в пределах которого сконцентрировано 90...99% энергии сигнала. Если сигнал $s(t)$ задан на полубесконечном $(0, \infty)$ интервале времени, то его активная длительность рассчитывается из условия

$$\int_0^{T_{SE}} s^2(t) dt = k \int_0^{\infty} s^2(t) dt, \quad (1.2)$$

где k – коэффициент уменьшения энергии сигнала по причине искусственного ограничения его длительности ($k = 0,9 - 0,99$).

Второй наиболее важной характеристикой с точки зрения транспортировки сигнала по каналу связи является ширина спектра сигнала ΔF_s , Гц, или эффективная ширина спектра сигнала ΔF_{SE} , Гц. Эффективной шириной спектра сигнала (шириной спектра сигнала) называется диапазон частот, в пределах которой сконцентрировано 90...99% энергии сигнала. Этот параметр даёт представление о скорости изменения сигнала внутри интервала его существования. Эффективная ширина спектра сигнала рассчитывается по формуле

$$\Delta F_{SE} = 2 \cdot f_{BE}, \quad (1.3)$$

где f_{BE} – верхняя эффективная граничная частота спектра сигнала, которая определяется из условия

$$\int_{-f_{BE}}^{f_{BE}} |S(f)|^2 df = k \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df, \quad (1.4)$$

где k – коэффициент уменьшения энергии сигнала по причине искусственного ограничения ширины его спектра ($k = 0,9 - 0,99$);

$|S(f)|$ – модуль спектральной функции сигнала.

В технике электрической связи спектр сигнала часто сознательно сокращают. Это обусловлено тем, что аппаратура и линия связи имеют ограниченную полосу пропускаемых частот. Сокращение спектра осуществляется исходя из допустимых искажений сигнала. Например, при телефонной связи требуется, чтобы речь была разборчива и чтобы

корреспонденты могли узнать друг друга по голосу. Для выполнения этих условий достаточно передать речевой сигнал в полосе от 300 до 3400 Гц. Передача более широкого спектра речи в этом случае нецелесообразна, так как ведёт к техническим осложнениям и увеличению затрат.

Примечание – При определении эффективной длительности и ширины спектра сигнала обычно используют два подхода: энергетический и информационный. Содержание энергетического подхода к определению этих параметров было рассмотрено ранее. Методика реализации информационного подхода к определению эффективной длительности и ширины спектра сигнала рассматривается далее в разделе «Методика и порядок выполнения работы».

Спектральная функция $S(f)$, В·Гц, сигнала – комплексная функция, представляющая собой прямое преобразование Фурье от сигнала

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2\pi ft} dt, \quad (1.5)$$

где f – частота, Гц;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Спектральная функция является основной с точки зрения описания свойств сигнала в частотной области.

Модуль спектральной функции сигнала рассчитывается по формуле

$$|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{S(f)\} + \operatorname{Im}^2 S(f)}, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(2\pi ft) dt \quad \text{– вещественная часть}$$

спектральной функции сигнала;

$$\operatorname{Im}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(2\pi ft) dt \quad \text{– мнимая часть спектральной функции}$$

сигнала.

В теории сигналов произведение длительности сигнала T_s на ширину его спектра ΔF_s обозначается B_s и называется базой сигнала:

$$B_S = T_S \cdot \Delta F_S . \quad (1.7)$$

Характеристика сигнала, которая определяет требования к ширине полосы пропускания передающего устройства, приемного устройства и канала системы электрической связи.

Примечание – Если база сигнала имеет порядок единицы ($B_S \approx 1$), то сигнал считается простым или узкополосным. Если $B_S \gg 1$, то сигнал считается сложным или широкополосным.

Динамический диапазон – это отношение наибольшей мгновенной мощности сигнала к той наименьшей мощности, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи сигнала по каналу связи:

$$D = 10 \lg \frac{P_{s \max}}{P_{s \min}} , \quad (1.8)$$

где $P_{s \max}$ – наибольшая мгновенная мощность сигнала, B^2 ;

$P_{s \min}$ – наименьшая мощность сигнала, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи сигнала по каналу связи, B^2 .

Примечание – Динамический диапазон речи диктора, например, равен 25...30 дБ, небольшого вокального ансамбля 45...65 дБ, симфонического оркестра 70...95 дБ. Во избежание перегрузок канала в радиовещании динамический диапазон часто сокращают до 35...45 дБ.

Как видно из (1.8) для определения динамического диапазона сигнала необходимо предварительно вычислить наибольшую мгновенную мощность сигнала. В связи с этим рассмотрим энергетические характеристики сигналов:

1. Энергия сигнала E , B^2c , выделяемая на сопротивлении один Ом – интеграл от квадрата сигнала по всей оси времени:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt . \quad (1.9)$$

Если сигнал $s(t)$ задан на конечном $(0, T_S)$ интервале времени, то эта характеристика рассчитывается из условия

$$E = \int_0^{T_s} s^2(t) dt. \quad (1.10)$$

Энергия сигнала может быть конечной или бесконечной. Например, любой сигнал конечной длительности имеет конечную энергию (если только он не содержит дельта-функций $\delta(t)$ или ветвей, уходящих в бесконечность), а любой периодический сигнал, например, гармоническое колебание, напротив, имеет бесконечную энергию.

2. Мгновенная мощность $p(t)$, В², сигнала, выделяемая на сопротивлении один Ом – квадрат мгновенного значения сигнала:

$$p(t) = s^2(t). \quad (1.11)$$

3. Средняя мощность P_{cp} , В², сигнала, выделяемая на сопротивлении один Ом, за заданный промежуток времени (t_1, t_2) – значение энергии сигнала, выделяемой на сопротивлении один Ом, за промежуток времени (t_1, t_2) , отнесенной к продолжительности этого промежутка времени:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt, \quad (1.12)$$

где $T = t_2 - t_1$ – интервал времени усреднения.

Если сигнал $s(t)$ задан на конечном $(0, T)$ интервале времени и если при этом энергия сигнала бесконечна, то можно определить его среднюю мощность на всей временной оси. Для этого нужно воспользоваться предыдущей формулой и выполнить предельный переход, устремив интервал усреднения в бесконечность:

$$P_{cp} \stackrel{2}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.13)$$

4. Среднеквадратическое (действующее) значение сигнала σ_S , В, – квадратный корень из средней мощности сигнала:

$$\sigma_S = \sqrt{P_{cp}}. \quad (1.14)$$

Примечание – Параметры E , $p(t)$ и P_{cp} иногда называют удельной мощностью и энергией, чтобы подчеркнуть подразумеваемое при этом единичное значение сопротивления нагрузки.

На основе длительности сигнала T_s , его динамического диапазона D_s и ширины спектра ΔF_s вводится более общая и наглядная характеристика – объём сигнала V_s , дБ:

$$V_s = T_s \cdot \Delta F_s \cdot D_s. \quad (1.15)$$

Объём сигнала V_s даёт общее представление о возможностях данного множества сигналов как переносчиков сообщений. Чем больше объём сигнала, тем больше информации можно «вложить» в этот объём и тем труднее передать такой сигнал по каналу связи с требуемым качеством.

Оборудование и материалы

Аппаратура. Для выполнения лабораторной работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память - не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство - не менее 100 МВ Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов - 256).

Программное обеспечение. Для выполнения лабораторной работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа Mathcad 13 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении лабораторной работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т.д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Указания по порядку выполнения работы

Методику выполнения работы рассмотрим на следующем примере.

Задан сигнал $s(t)$, который представляет собой отрезок синусоиды с амплитудой $U = 2$ В, обращающейся в нуль на концах отрезка времени $[0, \tau]$, где $\tau = 1$ мс = 10^{-3} с.

Аналитически это сигнал определяется формулой:

$$s(t) = U \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (1.16)$$

Требуется для сигнала $s(t)$ определить:

- длительность (эффективную длительность);
- энергию, мгновенную и среднюю мощность;
- среднеквадратическое (действующее) значение;
- динамический диапазон, считая, что наименьшая мощность сигнала, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи, составляет 10^{-6} В²;
- верхнюю граничную частоту спектра и ширину спектра, используя информационный и энергетический подходы;
- базу, используя информационный и энергетический подходы;
- объём, используя информационный и энергетический подходы.

Рассмотрим решение поставленной задачи в математическом пакете Mathcad:

1. Запускаем математический пакет Mathcad. Согласно аналитическому определению и заданным параметрам вводим определение сигнала $s(t)$ и строим его график (рисунок 1.1). Очевидно, длительность рассматриваемого сигнала равна 1 мс ($T_s = 1$ мс).

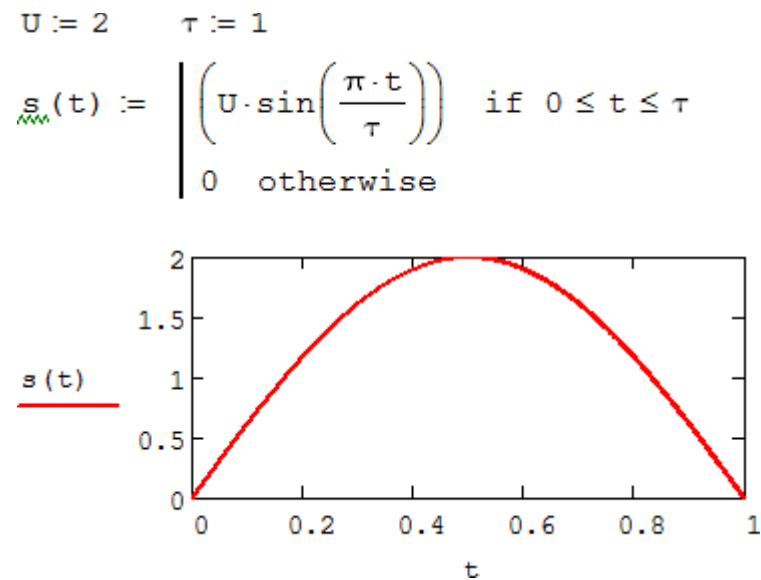


Рисунок 1.1 – Определение и график сигнала $s(t)$

2. По формулам (1.10) – (1.12) определяем энергию, мгновенную и среднюю мощность сигнала $s(t)$ (рисунок 1.2).

$$E := \int_0^{\tau} s(t)^2 dt = 2$$
$$p(t) := s(t)^2$$
$$P_{\text{ср}} := \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} s(t)^2 dt = 2$$

Рисунок 1.2 – Определение энергии, мгновенной и средней мощности сигнала $s(t)$

Строим графики мгновенной мощности сигнала $s(t)$ (рисунок 1.3).

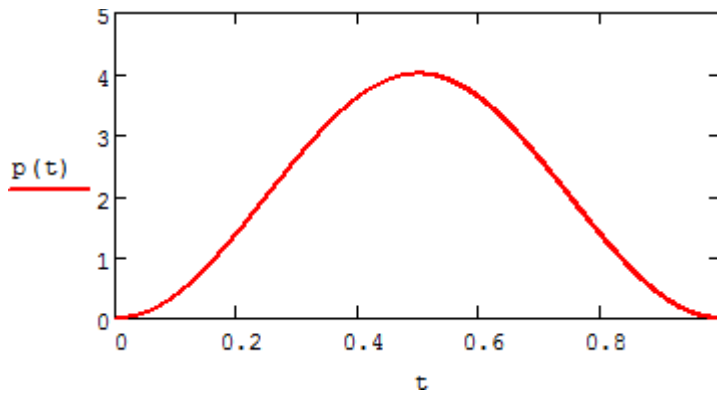


Рисунок 1.3 – График мгновенной мощности сигнала $s(t)$

4. По формуле (1.14) вычисляем среднеквадратическое (действующее) значение сигнала $s(t)$ (рисунок 1.4).

$$\sigma_s := \sqrt{P_{\text{ср}}} = 1.414$$

Рисунок 1.4 – Определение среднеквадратического значения сигнала $s(t)$

5. Из анализа графика на рисунке 1.3 видно, что наибольшая мгновенная мощность сигнала $s(t)$ достигается в момент времени равный половине

длительности сигнала, т. е. $P_{s \text{ max}} = p(t) \Big|_{t=0.5} = p(0,5) \text{ В}^2$. Тогда по

$$= 4$$

формуле (1.18) находим динамический диапазон D_s , дБ, сигнала $s(t)$, считая, что наименьшая мощность сигнала, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи, составляет 10^{-6} В^2 (рисунок 1.5).

$$P_{\text{сmin}} := 10^{-6}$$

$$P_{\text{сmax}} := p(0.5) = 4$$

$$D_s := 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{сmax}}}{P_{\text{сmin}}}\right) = 66.021$$

Рисунок 1.5 – Определение динамического диапазона сигнала $s(t)$

Следовательно, динамический диапазон сигнала $s(t)$ составляет 66.021 дБ ($D_s = 66.021$ дБ).

6. Определяем верхнюю эффективную граничную частоту спектра $f_{\text{ВЕ}}$ сигнала $s(t)$, используя информационный подход:

6.1) по формуле прямого интегрального преобразования Фурье находим

спектральную функцию сигнала $s(t)$ (рисунок 1.6);

$$j := \sqrt{-1}$$

$$S(f) := \int_0^T s(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

Рисунок 1.6 – Определение спектральной функции сигнала $s(t)$

6.2) определяем и строим графики нормированного амплитудного спектра сигнала $s(t)$ (рисунок 1.7);

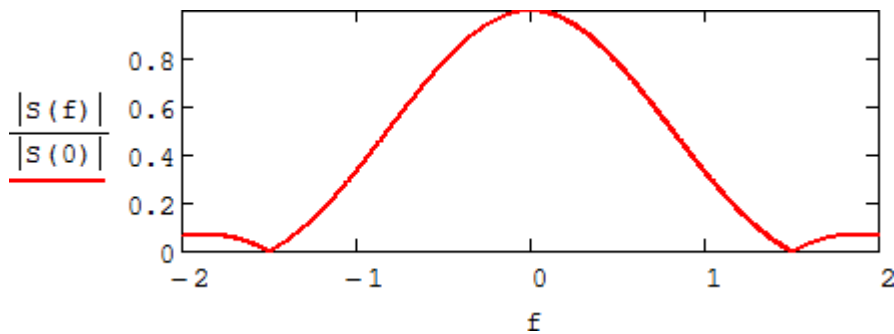


Рисунок 1.7 – График нормированного амплитудного спектра сигнала $s(t)$

6.3) на графике нормированного амплитудного спектра сигнала $s(t)$ проводим горизонтальную пунктирную линию на уровне 0,1 (рисунок 1.8);

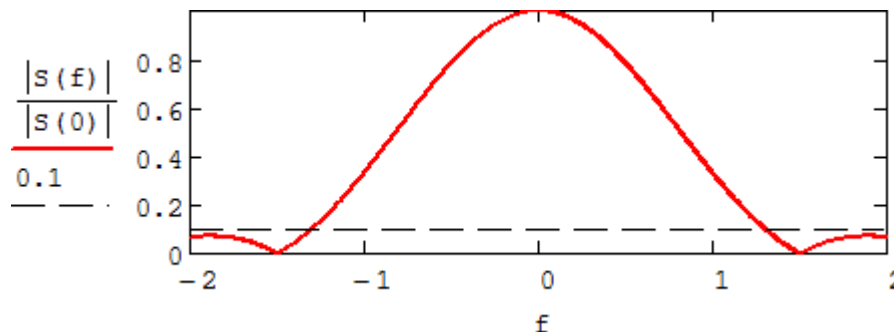


Рисунок 1.8 – На графике нормированного амплитудного спектра сигнала $s(t)$ проведена горизонтальная пунктирная линия на уровне 0,1

6.4) используя окно трассировки графиков «X-Y Trace», находим проекции точки пересечения указанного уровня 0,1 с графиком нормированного амплитудного спектра сигнала $s(t)$ на ось частот f , определяем верхнюю эффективную граничную частоту спектра f_{BE} , кГц, (рисунок 1.9). Как следует из рисунка 1.9, верхняя эффективная граничная

частота спектра сигнала $s(t)$ составляет 1,304 кГц ($f_{BE} = 1,304$ кГц).

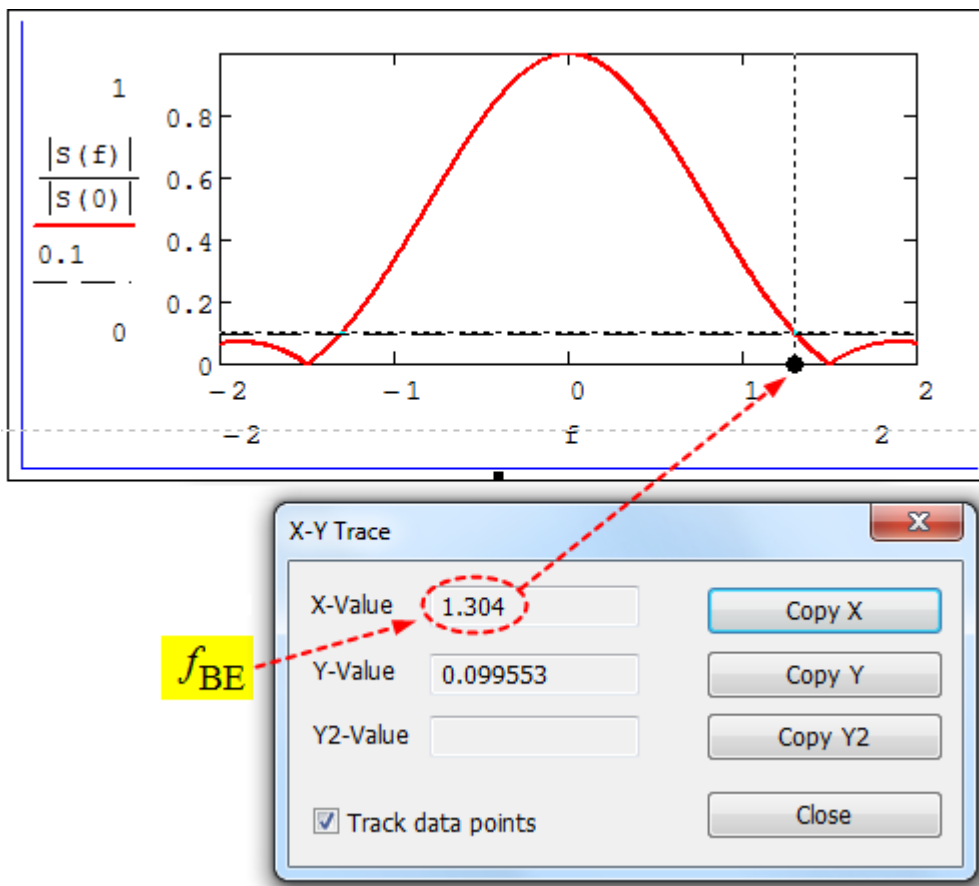


Рисунок 1.9 – Определяем верхнюю эффективную граничную частоту спектра сигнала $s(t)$

7. Вычисляем по формуле (1.3) эффективную ширину спектра ΔF_{SE} сигнала $s(t)$ (рисунок 1.10).

$$f_{be} := 1.304$$

$$\Delta F_{se} := 2 \cdot f_{be} = 2.608$$

Рисунок 1.10 – Вычисляем ширину спектра ΔF_{SE} и ΔF_{SE2} сигнала $s(t)$

Как видно из расчетов, приведенных на рисунке 1.10, эффективная ширина спектра ΔF_{SE} сигнала $s(t)$, вычисленная на основе использования информационного подхода, составляет 2,608 кГц ($\Delta F_{SE} = 2,608$ кГц).

8. По рассмотренной ранее методике определяем верхнюю эффективную граничную частоту спектра сигнала $s(t)$, используя энергетический подход к определению этого параметра:

8.1) находим верхнюю эффективную граничную частоту сигнала $s(t)$ (рисунок 1.11);

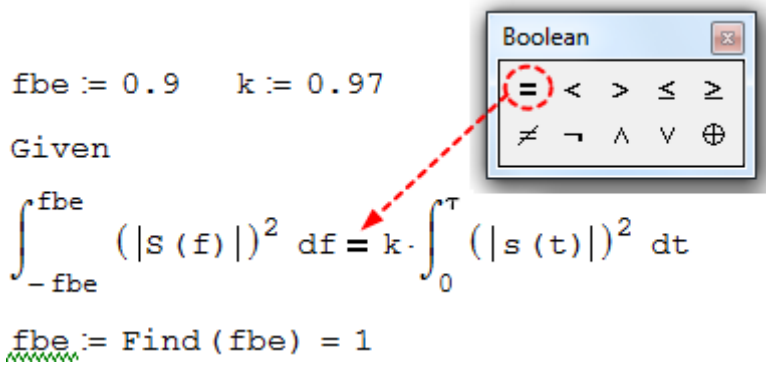


Рисунок 1.11 – Определяем верхнюю граничную частоту спектра $f_{BE} = 1$ кГц

Как следует из рисунка 1.11, в диапазоне частот от -1 до 1 кГц спектра сигнала $s(t)$ содержится 97% полной энергии этого сигнала.

8.2) вычисляем по формуле (1.3) эффективную ширину спектра ΔF_{SE} сигнала $s(t)$ (рисунок 1.12);

$$\Delta F_{SE} := 2 \cdot f_{BE} = 1.999$$

Рисунок 1.12 – Вычисляем ширину спектра ΔF_{SE} сигнала $s(t)$

Как видно из расчетов, приведенных на рисунке 1.12, эффективная ширина спектра ΔF_{SE} сигнала $s(t)$, вычисленная на основе использования энергетического подхода, составляет 1,999 кГц ($\Delta F_{SE} = 1,999$ кГц).

9. По формуле (1.7) определяем базу сигнала $s(t)$, используя информационный и энергетический подходы:

9.1) вычисляем базу сигнала $s(t)$, используя информационный подход (рисунок 1.13);

$$B_S := \tau \cdot \Delta F_{SE} = 2.608$$

Рисунок 1.13 – Вычисляем базу сигнала $s(t)$, используя информационный подход

9.2) вычисляем базу сигнала $s(t)$, используя энергетический подход (рисунок 1.14);

$$B_S := \tau \cdot \Delta F_{SE} = 1.999$$

Рисунок 1.14 – Вычисляем базу сигнала $s(t)$, используя энергетический подход

10. По формуле (1.15) определяем объём сигнала $s(t)$, используя информационный и энергетический подходы:

10.1) определяем объём сигнала $s(t)$, используя информационный подход (рисунок 1.15);

$$V_s := \tau \cdot B_s \cdot D_s = 172.182$$

Рисунок 1.15 – Вычисляем объём сигнала $s(t)$, используя информационный подход

Как видно из расчетов, приведенных на рисунке 1.15, объём сигнала $s(t)$, вычисленный на основе использования информационного подхода, составляет 172,182 дБ ($V_s = 172,182$ дБ).

10.2) определяем объём сигнала $s(t)$, используя энергетический подход (рисунок 1.16);

$$V_s := \tau \cdot B_s \cdot D_s = 131.984$$

Рисунок 1.16 – Вычисляем объём сигнала $s(t)$, используя энергетический подход

Как видно из расчетов, приведенных на рисунке 1.16, объём сигнала $s(t)$, вычисленный на основе использования энергетического подхода, составляет 131,984 дБ ($V_s = 131,984$ дБ), что примерно в 1,3 раза меньше, чем значение того же параметра, найденного на основе использования информационного подхода.

Таким образом, один и тот же сигнал может иметь различные характеристики, существенные для его передачи по каналам связи, при использовании различных методик их определения. Этот факт следует обязательно учитывать в инженерной практике при анализе и синтезе систем электрической связи.

Порядок выполнения работы:

1. Запустить Mathcad.
2. Определить в Mathcad для заданных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в

соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 1.2) следующие их числовые параметры:

- длительность (эффективную длительность) сигналов;
- энергию, мгновенную и среднюю мощность;
- среднеквадратическое (действующее) значение;
- динамический диапазон, считая, что наименьшая мощность сигнала, которую необходимо отличать от нуля при заданном качестве передачи, составляет 10^{-6} В^2 ;
- верхнюю граничную частоту спектра и ширину их спектров, используя информационный и энергетический подходы;
- базу, используя информационный и энергетический подходы;
- объём, используя информационный и энергетический подходы.

3. Исследовать влияние изменения длительности сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на эффективную ширину их спектров.
4. Сохранить результаты выполнения индивидуального задания.
5. Сформировать отчет по лабораторной работе.
6. Защитить работу.

Варианты заданий

Номер варианта (таблица 1.2) соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 1.2 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Обозначение сигнала	Название сигнала	Параметры сигнала
1	$s_1(t)$	Трапецеидальный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau = 3 \text{ мс}$, $\tau_1 = 1 \text{ мс}$, $\tau_2 = 1 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Косинус-квадратный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau = 6 \text{ мс}$
2	$s_1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Пилообразный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau = 2 \text{ мс}$
3	$s_1(t)$	Треугольный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau_1 = 1 \text{ мс}$, $\tau_2 = 1 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Колоколообразный импульс	$A = 2 \text{ В}$, $\tau = 2 \text{ мс}$

4	$s_1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Косинус-квадратный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 6 \text{ мс}$
5	$s_1(t)$	Пилообразный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 5 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Треугольный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau_1 = 2 \text{ мс}, \tau_2 = 3 \text{ мс}$
6	$s_1(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Косинус-квадратный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 8 \text{ мс}$
7	$s_1(t)$	Трапецеидальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 4 \text{ мс}, \tau_1 = 1 \text{ мс}, \tau_2 = 1 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Треугольный импульс	$A = 4 \text{ В}, \tau_1 = 1 \text{ мс}, \tau_2 = 3 \text{ мс}$
8	$s_1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Пилообразный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 6 \text{ мс}$
9	$s_1(t)$	Пилообразный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 4 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Колоколообразный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
10	$s_1(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 4 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Колоколообразный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
11	$s_1(t)$	Трапецеидальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 5 \text{ мс}, \tau_1 = 1 \text{ мс}, \tau_2 = 1 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Колоколообразный импульс	$A = 3 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$
12	$s_1(t)$	Пилообразный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 4 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Треугольный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau_1 = 2 \text{ мс}, \tau_2 = 2 \text{ мс}$
13	$s_1(t)$	Трапецеидальный импульс	$A = 4 \text{ В}, \tau = 5 \text{ мс}, \tau_1 = 2 \text{ мс}, \tau_2 = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Двусторонний экспоненциальный импульс	$A = 4 \text{ В}, \tau = 3 \text{ мс}$
14	$s_1(t)$	Треугольный импульс	$A = 4 \text{ В}, \tau_1 = 1 \text{ мс}, \tau_2 = 3 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Косинус-квадратный импульс	$A = 4 \text{ В}, \tau = 8 \text{ мс}$
15	$s_1(t)$	Трапецеидальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 5 \text{ мс}, \tau_1 = 2 \text{ мс}, \tau_2 = 2 \text{ мс}$
	$s_2(t)$	Односторонний экспоненциальный импульс	$A = 2 \text{ В}, \tau = 2 \text{ мс}$

Примечание – Графическое и аналитическое определение параметров исследуемых сигналов приведено в таблице 1.1

Содержание отчета

1. Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа Mathcad или Word и должен включать:
2. Название лабораторной работы.
3. Цель лабораторной работы.
4. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
5. Краткие выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Какие характеристики сигналов являются существенными для их передачи по каналам связи?
2. Какие энергетические характеристики сигналов исследуются в ходе лабораторной работы?
3. Как определить мощность сигнала?
4. Как определить энергию сигнала?
5. Как определить мгновенную мощность сигнала?
6. Как определить среднюю мощность сигнала, если энергия сигнала бесконечна?
7. Как определить среднеквадратическое (действующее) значение сигнала?
8. Что понимается под эффективной длительностью сигнала?
9. Как определить эффективную длительность сигнала?
10. Запишите прямое интегральное преобразование Фурье для сигнала
11. $s(t)$.
12. Как определить амплитудный спектр сигнала?
13. Что понимается под эффективной шириной спектра сигнала?
14. Как определить верхнюю эффективную граничную частоту спектра сигнала?
15. Как определить эффективную ширину спектра сигнала?
16. Как влияет изменение длительности сигнала (эффективной длительностью сигнала) на эффективную ширину его спектра?
17. Какова методика выполнения индивидуального задания?
18. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Практическая работа № 2

Расчет спектральных характеристик сигналов

Цель работы: исследование непрерывных и T-финитных сигналов и их спектров.

1. Домашнее задание

- 1.1. Изучите содержание работы и краткие теоретические сведения.
- 1.2. Ознакомьтесь с методическими указаниями по выполнению работы

1.3. Ознакомьтесь с индивидуальным заданием на выполнение лабораторной работы.

2. Основные теоретические сведения.

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний принято считать, что реализовано спектральное разложение этого сигнала в базисе гармонических функций. При этом сумма гармонических составляющих сигнала образуют его спектр.

Сигнал $S(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимно-однозначно связаны прямым и обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \exp(-j\omega t) dt \\ S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

По-существу, спектральная плотность сигнала позволяет определить вклад всех компонент, содержащихся внутри интервала, частот $\Delta\omega$.

Для периодической функции вида:

$$S(t) = S(t \pm nT),$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний; n – любое положительное целое число;

– круговая частота, используется ряд Фурье, составленный из ортогональных тригонометрических функций:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (5.2)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt; \quad (5.3)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos k\omega t dt; \quad (5.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin k\omega t dt; \quad (5.5)$$

Для одиночного импульса ($T \rightarrow \infty$):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{j\omega t} dt, \quad (5.6)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{-j\omega t} d\omega.$$

Комплексное выражение для спектральной плотности:

$$S(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.7)$$

где

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} S(t) \cos \omega t dt; B(\omega) = \int_0^{\infty} S(t) \sin \omega t dt \quad (5.8)$$

Амплитуда и фаза спектральной плотности:

$$|S(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}, \quad (5.9)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right). \quad (5.10)$$

Описание лабораторной установки.

1. ОПИСАНИЕ СХЕМЫ

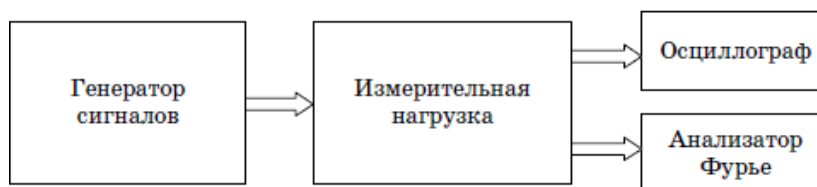


Рис. 5.1. Структурная схема исследования сигналов и их спектров

Генератор сигналов – создает гармонический сигнал, а также сигналы треугольной и прямоугольной формы.

Измерительная нагрузка – резистор или полупроводниковый диод с резистором.

Осциллограф – применяется виртуальный двухлучевой осциллограф. В данной работе рекомендуется устанавливать параметры развертки и делителей напряжения так, чтобы на его экране регистрировалось от 1 до 2 периодов сигнала без ограничения по амплитуде.

Анализатор Фурье – применяется виртуальный анализатор Фурье программы *Multisim*.

3. Методические указания по порядку проведения работы.

4.1. В программе *Multisim* создать модель для исследования сигналов и их спектров в соответствии с принципиальной электрической схемой, приведённой на рис 5.2.

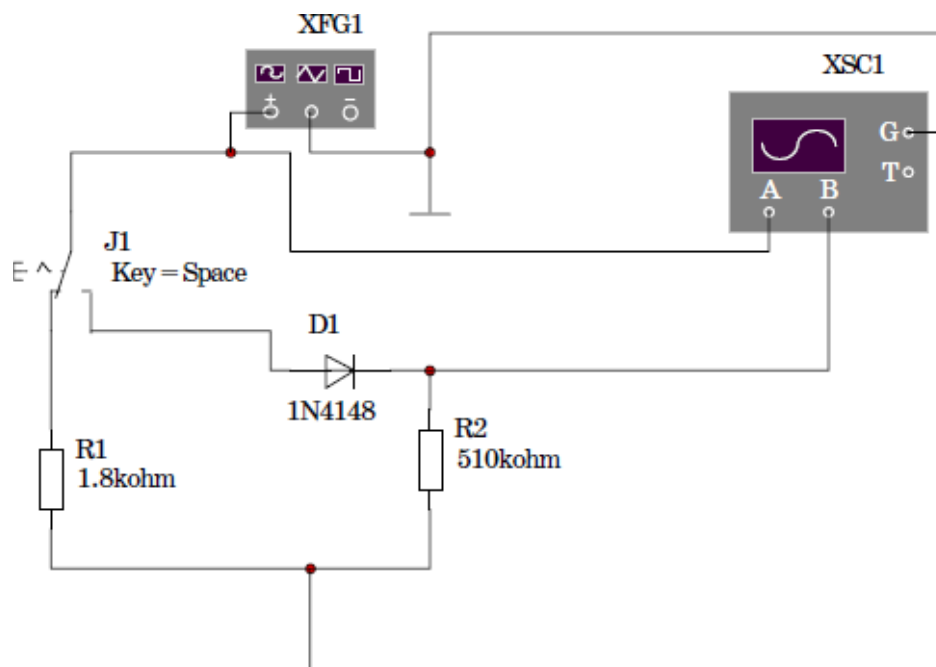


Рис. 5.2. Принципиальная электрическая схема исследования сигналов и их спектров

4.2. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Options и на появившейся вкладке щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Preferences.

4.3. На вкладке Preferences установить флажок в строке Show nodenames и нажать кнопку ОК.

4.4. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Simulate и на появившейся вкладке выбрать путь Analyses - Fourier analyses. После щелчка на последнем табло должна появиться папка установок Фурье-анализа.

4.5. Установить на вкладке Analysis Parameters частоту (Frequency resolution) и число гармоник (Number of harmonics) в соответствии с вариантом задания, указанным преподавателем и табл. 1.

4.6. Установить на вкладке Analysis Parameters время анализа (Stopping time for sampling), равное 0,1 с.

4.7. В строке Display установить режим Graph.

4.8. Открыть вкладку Output variables и в появившемся левом окне выделить номер исследуемого узла схемы, к которому подключен + генератора XFG1. Перенести указанный номер в правое окно нажатием кн. Plot during simulation.

4.9. Нажать кнопку Accept.

Номер варианта	Частота (<i>Frequency</i>), Гц	Амплитуда (<i>Amplitude</i>), В	Число гармоник (<i>Number of harmonics</i>)
1	100	6	9
2	250	8	5
3	125	7	7
4	150	11	9
5	80	9	5
6	110	10	7
7	280	12	9
8	420	15	5
9	500	14	7
10	350	16	9

4.10. Установить частоту и амплитуду генератора сигналов XFG1 в соответствии с табл. 5.1.

4.11. Представить собранную модель лаборанту или преподавателю для проверки.

4.12. Нажатием правой кнопки мыши на черном поле модели вызвать соответствующую вкладку и установить цвет всех компонентов модели - красный. Копировать принципиальную электрическую схему модели в соответствующий раздел отчета.

Изучение гармонического сигнала и его спектра

4.13. Включить модель и наблюдать гармонический сигнал на входе осциллографа А (в режиме DC), установив необходимые значения длительности развертки (Timebase) и делителей напряжения (Scale).

4.14. Выключить модель незадолго до момента полного хода луча осциллографа.

4.15. Включить транспонирование осциллограмм в графики MathCad путем последовательного нажатия кнопок Transfer-Export Simulation Results to MathCad-Continue. Расположить окно графика в нижнем левом углу монитора таким образом, чтобы изображение схемы модели было доступно.

4.16. Копировать график в соответствующий раздел отчета.

4.17. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Simulate и на появившейся вкладке выбрать путь Analyses - Fourier analyses. Послещелчка на последнем табло должна появиться папка установок Фурье-анализа.

4.18. Нажать кнопку Simulate. В течение 1 минуты на мониторе должны появиться результаты моделирования в виде графиков. Если этого не произошло, обратиться к лаборанту или преподавателю.

4.19. Копировать график амплитудного спектра в соответствующий раздел отчета.

4.20. Закрыть окно Analysis Graphs.

Изучение сигнала колоколообразной формы и его спектра

4.21. Подключить к выходу генератора диод нажатием клавиши Space на клавиатуре компьютера.

4.22. Включить модель и наблюдать сигнал колоколообразной формы на входе осциллографа В (в режиме DC), установив необходимые значения длительности развертки (Timebase) и делителей напряжения (Scale).

4.23. Выключить модель незадолго до момента полного хода луча осциллографа.

4.24. Включить транспонирование осциллограмм в графики MathCad путем последовательного нажатия кнопок Transfer-Export Simulation Results to MathCad-Continue.

4.25. Копировать график в соответствующий раздел отчета.

4.26. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Simulate и на появившейся вкладке выбрать путь Analyses - Fourier analyses. После щелчка на последнем табло должна появиться папка установок Фурье-анализа.

4.27. Открыть вкладку Output variables и в появившемся правом окне выделить номер исследуемого ранее узла схемы. Перенести указанный номер в левое окно нажатием кнопки Remove.

4.28. В левом окне выделить номер исследуемого узла схемы, к которому подключен анод диода D1. Перенести указанный номер в правое окно нажатием кнопки Plot during simulation.

4.29. Нажать кнопку Simulate. В течение 1 минуты на мониторе должны появиться результаты моделирования в виде графиков.

4.30. Копировать график амплитудного спектра в соответствующий раздел отчета.

Изучение сигнала треугольной формы и его спектра

4.31. Переключить генератор в режим сигнала треугольной формы.

4.32. Установить коэффициент заполнения генератора сигнала треугольной формы в соответствии с вариантом задания, указанным преподавателем и табл. 5.2.

Варианты заданий коэффициента заполнения сигналов

Номер варианта	Коэффициент заполнения (Duty Cycle), %
1	50
2	30
3	25
4	35
5	65
6	70
7	45
8	20
9	40
10	60

4.33. Щелкнуть левой кнопкой мыши на черном поле модели, свободном от каких-либо компонентов.

4.34. Включить модель и наблюдать сигнал треугольной формы на входе осциллографа В (в режиме DC), установив необходимые значения

длительности развертки (Timebase) и делителей напряжения (Scale).

4.35. Выключить модель незадолго до момента полного хода луча осциллографа.

4.36. Включить транспонирование осциллограмм в графики MathCad путем последовательного нажатия кнопок Transfer-Export Simulation Results to MathCad-Continue.

4.37. Копировать график в соответствующий раздел отчета.

4.38. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Simulate и на появившейся вкладке выбрать путь Analyses - Fourier analyses. После щелчка на последнем табло должна появиться папка установок Фурье-анализа.

4.39. Нажать кнопку Simulate. В течение 1 минуты на мониторе должны появиться результаты моделирования в виде графиков.

4.40. Копировать график амплитудного спектра в соответствующий раздел отчета.

Изучение сигнала прямоугольной формы и его спектра

4.41. Переключить генератор в режим сигнала прямоугольной формы.

4.42. Щелкнуть левой кнопкой мыши на черном поле модели, свободном от каких-либо компонентов.

4.43. Включить модель и наблюдать сигнал прямоугольной формы на входе осциллографа В (в режиме DC), установив необходимые значения длительности развертки (Timebase) и делителей напряжения (Scale).

4.44. Выключить модель незадолго до момента полного хода луча осциллографа.

4.45. Включить транспонирование осциллограмм в графики MathCad путем последовательного нажатия кнопок Transfer-Export Simulation Results to MathCad-Continue.

4.46. Копировать график в соответствующий раздел отчета.

4.47. Щелкнуть левой кнопкой мыши на табло Simulate и на появившейся вкладке выбрать путь Analyses - Fourier analyses. После щелчка на последнем табло должна появиться папка установок Фурье-анализа.

4.48. Нажать кнопку Simulate. В течение 1 минуты на мониторе должны появиться результаты моделирования в виде графиков.

4.49. Копировать график амплитудного спектра в соответствующий раздел отчета.

4.50. Представить результаты измерений преподавателю для проверки.

4.51. Закрыть окно программы Multisim без сохранения изменений в файле Circuit 1.

1. Отчёт должен содержать.

5.1. Краткие теоретические сведения.

5.2. Иллюстрационные материалы:

- Принципиальную электрическую схему исследования спектров сигналов;
- График спектров исследуемых сигналов;

- Расчёты и графики спектров²⁹ единичных импульсов прямоугольной, колоколообразной и треугольной формы, применяя программу MathCad.

5.3. Выводы по работе.

2. Контрольные вопросы.

6.1. Дайте определение понятия периодического сигнала. Приведите примеры физических процессов, для которых модель периодического сигнала является точным способом описания.

6.2. Как возникает понятие “отрицательной” частоты?

6.3. Какими свойствами обладает спектральная плотность вещественного сигнала?

6.4. Как изменится спектр периодического сигнала, если период следования стремится к бесконечности?

6.5. Как найти распределение мощности и энергии в спектре периодического сигнала?

6.6. Как влияет изменение длительности импульса и периода повторения на спектр периодической последовательности импульсов?

6.7. Каковы особенности спектра 5-импульса?

6.8. Какова связь между длительностью импульса и шириной его спектра?

6.9. Как определить число гармонических составляющих в спектре импульсного сигнала?

6.10. Как найти распределение мощности и энергии в спектре непериодического сигнала?

6.11. Какая доля общей энергии прямоугольного импульса содержится в пределах основного лепестка спектральной диаграммы?

6.12. Раскройте понятие комплексной частоты.

6.13. Как определить спектральную плотность комплексного экспоненциального сигнала?

6.14. Как определить спектральную плотность радиосигнала?

6.15. В каких случаях применимо преобразование Лапласа по отношению к описанию спектров сигналов?

Литература [1,6].

Справочные данные о диоде сигнальном типа 1N4148:

$$U_{\text{обр.макс}} = 75 \text{ В}; I_{\text{обр}} = 5 \text{ мкА}; U_{\text{пр}} = 0,6 \text{ В}; I_{\text{пр}} = 10 \text{ мА}; t_{\text{восст.Робр}} = 4 \text{ нс}; C = 1,3 \text{ пФ}$$

Практическая работа № 3

Расчет информационных характеристик источников сообщений и каналов связи

1. Цель работы: Исследование информационных характеристик источника дискретных сообщений и канала связи без шума.

2. Общие сведения

2.1. Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа содержит пять задач. Исходными данными является закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) , который необходимо сформировать на основе таблицы 1 в соответствии с Вашим индивидуальным номером (см. п.2.2).

В лабораторной работе необходимо вычислить:

1. Энтропию источника дискретных сообщений.
2. Избыточность источника дискретных сообщений.
3. Среднее количество взаимной информации $I(Y \rightarrow X)$.
4. Скорость создания информации источником дискретных сообщений.
5. Скорость передачи информации и пропускную способность бинарного канала без шума.

2.2. Исходные данные

Формирование исходных данных. В таблице 1 вычеркните строки с номерами j , $9-j$ и столбцы с номерами i , $9-i$. Здесь j – последняя, а i – предпоследняя цифры Вашего индивидуального номера. Оставшиеся после вычеркивания строки обозначьте в порядке возрастания символами y_1, \dots, y_8 , а оставшиеся столбцы – символами x_1, \dots, x_8 . Далее, просуммируйте все оставшиеся в таблице 1 числа (цифры первого столбца и первой строки не суммировать) и разделите каждое из "участвовавших" в суммировании чисел на результат суммирования. Полученные данные сведите в таблицу 2.

Таблица 1. Таблица для формирования исходных данных.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	16	10	4							
1	8	45	22	17	23					
2	6	19	54	26	35	29	13			
3		11	39	76	70	51	31			
4		8	14	31	95	82	57			
5			12	29	69	97	74	11		
6				17	47	73	83	30	6	
7					31	43	36	62	13	5
8							15	25	37	7
9								12	9	21

Таблица 2. Закон распределения случайной величины (X, Y) .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
y_1	0,016	0,010						
y_2	0,008	0,045	0,017	0,023				
y_3	0,006	0,019	0,026	0,035	0,029	0,013		

y_4		0,00 8	0,031	0,094	0,082	0,057		
y_5			0,029	0,069	0,096	0,074		
y_6				0,031	0,043	0,036	0,01 3	0,005
y_7						0,015	0,03 7	0,007
y_8							0,00 9	0,021

В таблице 2 (в качестве примера) приведены исходные данные контрольного задания, соответствующие варианту с двумя последними цифрами 73 (в таблице 1 вычеркнуты строки 3 и 6 и столбцы 7 и 2).

После формирования таблицы 2 выполните проверку следующего условия:

$$\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 p(x_i, y_j) = 1.00 \quad (1)$$

где $p(x_i, y_j)$ – вероятность совместного появления событий x_i и y_j (число в полученной таблице исходных данных, стоящее на пересечении i -го столбца и j -ой строки).

Если условие (1) не выполняется, то найдите и исправьте ошибку.

Примечание. Отличие от нуля в третьей цифре после запятой в (1) следует рассматривать как погрешность вычислений.

При решении задач понадобятся законы распределения случайных величин X , Y и условных случайных величин ($X | y_j$) ($j=1, 2, \dots, 8$). Вероятности и условные вероятности событий этих случайных величин вычисляются соответственно по следующим формулам:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^8 p(x_i, y_j) \quad (2)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^8 p(x_i, y_j) \quad (3)$$

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \quad (4)$$

Расчеты по формулам (2) – (4) выполняются при решении приведенных ниже задач.

2.3. Задачи практической работы

1. Вычислить энтропию дискретной случайной величины X .

Указания. Энтропия дискретной случайной величины определяется по формуле

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

где $p(x_i)$ – вероятность события x_i , определяемая в этой задаче по формуле (2).

2, В предположении, что случайная величина X из примера 1 является математической моделью источника дискретных сообщений, вычислить информационную избыточность этого источника.

Указания. Информационная избыточность источника дискретных сообщений определяется по формуле

$$R = \frac{H_{\max} - H(X)}{H_{\max}},$$

где $H_{\max} = \log_2 n$ – максимальная энтропия источника сообщений.

3, В предположении, что сообщения источника из задачи 2 наблюдаются посредством устройства, математическая модель которого задана случайной величиной Y и что задано совместное распределение случайных величин X и Y , вычислить среднее количество взаимной информации $I(Y \rightarrow X)$ (количество информации, поставляемое в среднем на один опыт данным устройством относительно сообщений, вырабатываемых источником).

Указания. Среднее количество взаимной информации определяется по формуле

$$I(Y \rightarrow X) = H(X) - H(X|Y),$$

где

$$H(X|Y) = - \sum_{j=1}^m p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i|y_j) \log_2 p(x_i|y_j)$$

Здесь $H(X|Y)$ – условная энтропия случайной величины X . Вероятности $p(y_j)$ и условные вероятности $p(x_i|y_j)$ в этой задаче определяются по формулам (3) и (4). Вычисление $I(Y \rightarrow X)$ можно выполнять и по другим формулам.

4. Вычислите скорость создания информации источником дискретных сообщений из задачи 2 при условии, что длительность передачи каждого символа (буквы) источника одинакова и составляет $\tau_u = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Указания. Скорость создания информации источником дискретных сообщений определяется по формуле

$$\bar{H}(X) = \frac{H(X)}{\tau_u},$$

где τ_u – длительность передачи буквы источника.

5. Определите скорость передачи информации и пропускную способность бинарного канала без шума, если для передачи сообщения источника из задачи 2 используется равномерный двоичный код, а длительность передачи элементарной кодовой посылки $\tau_k = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Указания. Пропускная способность ³³ бинарного канала без шума C и скорость передачи информации \bar{I} при использовании равномерного двоичного кода определяется по формулам

$$C = \frac{1}{\tau_k}; \quad \bar{I} = \frac{H(X)}{\ell \tau_k},$$

где $H(X)$ - энтропия источника, ℓ - количество элементарных кодовых посылок, необходимых для передачи одной буквы источника. Для определения \bar{I} закодируйте буквы источника равномерным двоичным кодом.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Ознакомьтесь с материалом, изложенным в пункте 2, этой работы.

3.2. Сформируйте исходные данные в соответствии с Вашим индивидуальным номером.

3.3. Выполните согласно п. 2.3 необходимые вычисления. Расчеты рекомендуется выполнять с использованием Microsoft Excel или Matlab.

3.4. Проанализируйте полученные результаты.

3.5. Оформите отчет и защитите лабораторную работу.

3.6. Выключите компьютер и приведите в порядок рабочее место.

4. Содержание отчета

4.1. Цель работы.

4.2. Сформированные в соответствии с Вашим индивидуальным номером исходные данные.

4.3. Результаты решения задач с необходимыми пояснениями.

4.4. Анализ полученных результатов.

4.5. Выводы по работе.

5. Контрольные вопросы

1. Какие значения может принимать избыточность источника дискретных сообщений?

2. В каком случае будет иметь место $I(Y \rightarrow X) = 0$?

3. Что характеризует в выражении $I(Y \rightarrow X) = H(X) - H(X|Y)$ условная энтропия $H(X|Y)$?

4. Влияют ли на скорость передачи информации статистические характеристики источника информации?

5. Зависит ли пропускная способность канала связи от свойств источника информации?

Практическая работа № 4 Расчет параметров сигналов с импульсной модуляцией

1. Цель работы

Исследование информационных характеристик источника дискретных сообщений и канала связи без шума.

2. Общие сведения

2.1. Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа содержит пять задач. Исходными данными является закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) , который необходимо сформировать на основе таблицы 1 в соответствии с Вашим индивидуальным номером (см. п.2.2).

В лабораторной работе необходимо вычислить:

1. Энтропию источника дискретных сообщений.
2. Избыточность источника дискретных сообщений.
3. Среднее количество взаимной информации $I(Y \rightarrow X)$.
4. Скорость создания информации источником дискретных сообщений.
5. Скорость передачи информации и пропускную способность бинарного канала без шума.

2.2. Исходные данные

Формирование исходных данных. В таблице 1 вычеркните строки с номерами j , $9-j$ и столбцы с номерами i , $9-i$. Здесь j – последняя, а i – предпоследняя цифры Вашего индивидуального номера. Оставшиеся после вычеркивания строки обозначьте в порядке возрастания символами y_1, \dots, y_8 , а оставшиеся столбцы – символами x_1, \dots, x_8 . Далее, просуммируйте все оставшиеся в таблице 1 числа (цифры первого столбца и первой строки не суммировать) и разделите каждое из "участвовавших" в суммировании чисел на результат суммирования. Полученные данные сведите в таблицу 2.

Таблица 1. Таблица для формирования исходных данных.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	16	10	4							
1	8	45	22	17	23					
2	6	19	54	26	35	29	13			
3		11	39	76	70	51	31			
4		8	14	31	95	82	57			
5			12	29	69	97	74	11		
6				17	47	73	83	30	6	
7					31	43	36	62	13	5
8							15	25	37	7
9								12	9	21

Таблица 2. Закон распределения случайной величины (X, Y) .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
y_1	0,016	0,010						

y_2	0,008	0,04 5	0,017	0,023	35			
y_3	0,006	0,01 9	0,026	0,035	0,029	0,013		
y_4		0,00 8	0,031	0,094	0,082	0,057		
y_5			0,029	0,069	0,096	0,074		
y_6				0,031	0,043	0,036	0,01 3	0,005
y_7						0,015	0,03 7	0,007
y_8							0,00 9	0,021

В таблице 2 (в качестве примера) приведены исходные данные контрольного задания, соответствующие варианту с двумя последними цифрами 73 (в таблице 1 вычеркнуты строки 3 и 6 и столбцы 7 и 2).

После формирования таблицы 2 выполните проверку следующего условия:

$$\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 p(x_i, y_j) = 1.00, \quad (1)$$

где $p(x_i, y_j)$ – вероятность совместного появления событий x_i и y_j (число в полученной таблице исходных данных, стоящее на пересечении i -го столбца и j -ой строки).

Если условие (1) не выполняется, то найдите и исправьте ошибку.

Примечание. Отличие от нуля в третьей цифре после запятой в (1) следует рассматривать как погрешность вычислений.

При решении задач понадобятся законы распределения случайных величин X , Y и условных случайных величин ($X | y_j$) ($j=1, 2, \dots, 8$). Вероятности и условные вероятности событий этих случайных величин вычисляются соответственно по следующим формулам:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^8 p(x_i, y_j), \quad (2)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^8 p(x_i, y_j), \quad (3)$$

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}. \quad (4)$$

Расчеты по формулам (2) – (4) выполняются при решении приведенных ниже задач.

2.3. Задачи лабораторной работы

1. Вычислить энтропию дискретной случайной величины X .

Указания. Энтропия дискретной случайной величины определяется по формуле

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i),$$

где $p(x_i)$ – вероятность события x_i , определяемая в этой задаче по формуле (2).

2, В предположении, что случайная величина X из примера 1 является математической моделью источника дискретных сообщений, вычислить информационную избыточность этого источника.

Указания. Информационная избыточность источника дискретных сообщений определяется по формуле

$$R = \frac{H_{\max} - H(X)}{H_{\max}},$$

где $H_{\max} = \log_2 n$ – максимальная энтропия источника сообщений.

3, В предположении, что сообщения источника из задачи 2 наблюдаются посредством устройства, математическая модель которого задана случайной величиной Y и что задано совместное распределение случайных величин X и Y , вычислить среднее количество взаимной информации $I(Y \rightarrow X)$ (количество информации, поставляемое в среднем на один опыт данным устройством относительно сообщений, вырабатываемых источником).

Указания. Среднее количество взаимной информации определяется по формуле

$$I(Y \rightarrow X) = H(X) - H(X|Y),$$

где

$$H(X|Y) = - \sum_{j=1}^m p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i|y_j) \log_2 p(x_i|y_j)$$

Здесь $H(X|Y)$ – условная энтропия случайной величины X . Вероятности $p(y_j)$ и условные вероятности $p(x_i|y_j)$ в этой задаче определяются по формулам (3) и (4). Вычисление $I(Y \rightarrow X)$ можно выполнять и по другим формулам.

4. Вычислите скорость создания информации источником дискретных сообщений из задачи 2 при условии, что длительность передачи каждого символа (буквы) источника одинакова и составляет $\tau_u = 3,75 \cdot 10^{-3}$ с.

Указания. Скорость создания информации источником дискретных сообщений определяется по формуле

$$\bar{H}(X) = \frac{H(X)}{\tau_u},$$

где τ_u – длительность передачи буквы источника.

5. Определите скорость передачи информации и пропускную способность бинарного канала без шума, если для передачи сообщения источника из задачи 2 используется

равномерный двоичный код, а длительность передачи элементарной кодовой посылки $\tau_k = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Указания. Пропускная способность бинарного канала без шума C и скорость передачи информации \bar{I} при использовании равномерного двоичного кода определяется по формулам

$$C = \frac{1}{\tau_k}; \quad \bar{I} = \frac{H(X)}{\ell \tau_k},$$

где $H(X)$ - энтропия источника, ℓ - количество элементарных кодовых посылок, необходимых для передачи одной буквы источника. Для определения \bar{I} закодируйте буквы источника равномерным двоичным кодом.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Ознакомьтесь с материалом, изложенным в пункте 2, этой работы.

3.2. Сформируйте исходные данные в соответствии с Вашим индивидуальным номером.

3.3. Выполните согласно п. 2.3 необходимые вычисления. Расчеты рекомендуется выполнять с использованием Microsoft Excel или Matlab.

3.4. Проанализируйте полученные результаты.

3.5. Оформите отчет и защитите лабораторную работу.

3.6. Выключите компьютер и приведите в порядок рабочее место.

4. Содержание отчета

4.1. Цель работы.

4.2. Сформированные в соответствии с Вашим индивидуальным номером исходные данные.

4.3. Результаты решения задач с необходимыми пояснениями.

4.4. Анализ полученных результатов.

4.5. Выводы по работе.

5. Контрольные вопросы

1. Какие значения может принимать избыточность источника дискретных сообщений?

2. В каком случае будет иметь место $I(Y \rightarrow X) = 0$?

3. Что характеризует в выражении $I(Y \rightarrow X) = H(X) - H(X|Y)$ условная энтропия $H(X|Y)$?

4. Влияют ли на скорость передачи информации статистические характеристики источника информации?

5. Зависит ли пропускная способность канала связи от свойств источника информации?

Практическая работа № 5

38 Расчет характеристик цифровых сигналов

Введение

При модуляции параметров немодулированного (несущего) колебания

$$U_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1)$$

Формируется модулированное колебание (радиосигнал), которое в общем случае можно записать в виде

$$U(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) \cos \phi(t), \quad (2)$$

где ω_0 - несущая частота, $\phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ - мгновенная фаза колебания.

Амплитуда $A(t)$ и фазовый сдвиг колебания (2) изменяются в зависимости от изменения модулирующего сигнала $S(t)$.

Спектр модулированного колебания (2) обычно оказывается шире спектра модулирующего сигнала. У большинства радиосигналов ширина спектра $2\Delta\omega$ мала по сравнению с несущей частотой, т.е. $2\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$, что позволяет относить их к узкополосным сигналам.

1. Амплитудно-модулированные сигналы.

При амплитудной модуляции происходит изменение амплитуды $A(t)$ модулированного колебания при постоянной начальной фазе φ . Выражение (2) принимает вид:

$$U_{AM}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3)$$

Огибающая (амплитуда) модулированного колебания изменяется вокруг среднего значения A_0 и связана с модулирующим сигналом линейным соотношением:

$$A(t) = A_0 + K_A S(t), \quad (4)$$

где K_A -коэффициент пропорциональности такой, что при любых t обеспечивается $A(t) \geq 0$. АМ колебание (3) можно записать в комплексной форме:

$$U_{AM}(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{A}(t) e^{j\omega_0 t} \right],$$

где

$\dot{A}(t) = A(t)e^{j\varphi}$ - комплексная огибающая данного колебания. На комплексной плоскости, вращающейся с постоянной угловой частотой ω_0 такой сигнал

отображается неподвижным вектором \vec{OA} на действительную ось (рис.1)

1.1 Модуляция гармоническим сигналом (тональная модуляция)

Если модулирующий сигнал $S(t)$ является гармоническим колебанием т.е.

$$S(t) = S \cos(\Omega t + \Psi), \quad (5)$$

то согласно (4), огибающая модулированного колебания имеет вид

$$A(t) = A_0 + \Delta A \cos(\Omega t + \Psi), \quad (6)$$

где Ω -частота модуляции ($\Omega \ll \omega_0$), Ψ - начальная фаза огибающей, $\Delta A = K_A S$ - наибольшее отклонение амплитуды от среднего значения. Мгновенное значение подобного тонально-модулированного колебания выражается как:

$$U_{AM}(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \Psi)] \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (7)$$

где отношение $M = \Delta A / A_0$, называется коэффициентом или индексом модуляции, является одним из основных параметров АМ колебания. На рис.2 изображена временная диаграмма колебания (7). Чтобы определить частотный спектр АМ колебания, преобразуем выражение (7) к виду:

$$U_{AM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + A_0 \cos(\Omega t + \Psi) \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Psi] + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \Psi], \quad (8)$$

Из (8) видно, что колебание $U_{AM}(t)$ имеет дискретный спектр, состоящий из трёх высокочастотных спектральных составляющих. Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное колебание с частотой ω_0 и фазой φ . Второе и третье слагаемые называют соответственно верхней и нижней боковыми составляющими. Они расположены симметрично относительно несущего колебания на верхней ($\omega_0 + \Omega$) и нижней ($\omega_0 - \Omega$) боковых частотах модуляции и имеют соответственно начальные фазы $(\varphi + \Psi)$ и $(\varphi - \Psi)$. Амплитуды боковых составляющих равны $A_0 M / 2$. При неискажённой модуляции $A_0 M / 2 \leq A_0 / 2$ ($M \leq 1$). Рис.3 иллюстрирует формирование спектра АМ колебания. На рис.3а изображен спектр колебания до модуляции. При модуляции (в результате перемножения функций $\cos \Omega t * \cos \omega_0 t$) происходит сдвиг спектра модулирующего сигнала на величину ω_0 и расширение спектра (рис.3б). ширина полосы частот $2\Delta\omega_{AM}$, занимаемой АМ колебанием, определяется удвоенной частотой модулирующего сигнала:

$$2\Delta\omega_{AM} = 2\Omega$$

Выражению (8) соответствует векторная диаграмма на рис.4а, на которой каждая из трёх составляющих АМ колебания представлена соответствующим вектором. Ось времени вращается по часовой стрелке с угловой частотой ω_0 ,

Несущее колебание изображается неподвижным вектором \vec{OC} длиной A_0 с

начальной фазой φ . Векторы \vec{CM} и \vec{CN} длиной $A_0M/2$ изображают

соответственно верхнюю и нижнюю боковые составляющие. Они

пристраиваются к концу вектора \vec{OC} , составляя с его направлением угол $\pm(\Omega t + \Psi)$, и вращаются в противоположных направлениях с угловой частотой

Ω . Суммой векторов \vec{CM} и \vec{CN} является вектор \vec{CD} . Поскольку векторы

боковых составляющих расположены симметрично относительно вектора \vec{OC} и вращаются с одинаковой угловой частотой в разные стороны, то направление

вектора \vec{CD} и суммарного вектора \vec{OD} , отображающего модулированное колебание, в любой момент времени совпадает с направлением вектора

несущего колебания \vec{OC} . Длина вектора \vec{OD} соответствует мгновенному значению амплитуды модулированного колебания $A(t)$. Она изменяется периодически (с периодом $2\pi / \Omega$) от минимальной $(A_0 - MA_0)$ до максимальной

$(A_0 + MA_0)$ величины, когда векторы боковых составляющих \vec{CM} и \vec{CN} занимают положения, показанные на рис.4б, в соответственно. Проекция \vec{OD}_1

суммарного вектора \vec{OD} на вращающуюся ось времени t определяет мгновенное значение АМ колебания $U_{AM}(t)$.

Оценим мощность АМ сигнала. Из выражения (7) следует, что амплитуда модулированного колебания изменяется от $A_{min} = A_0(1 - M)$ до $A_{max} = A_0(1 + M)$, следовательно, средняя за период высокой частоты мощность модулированного колебания изменяется соответственно от $P_{min} = P_0(1 - M)^2$ до $P_{max} = P_0(1 + M)^2$, где $P_0 = \frac{1}{2} U_0^2$ — мощность несущего колебания.

Средняя мощность АМ сигнала за период модуляции определяется суммой мощностей гармонических составляющих:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} U_0^2 + \frac{1}{4} [MA_0]^2 + \frac{1}{4} [MA_0]^2$$

или

$$P_{cp} = P_0(1 + 0,5M^2)$$

При $M=1$ $P_{\max} = 4P_0$, $P_{\text{cp}}=1,5P_0$, отношение средней мощности P_{cp} к максимальной P_{\max} равно 0,375. Эти соотношения указывают на существенные недостатки рассмотренного вида амплитудной модуляции. Из равенства $P_{\text{cp}}=1,5P_0$ (при $M=1$) следует, что третья часть мощности передатчика затрачивается на излучение боковых составляющих АМ колебания, несущих передаваемую информацию, а две трети мощности - на излучение колебания несущей частоты. Равенство $P_{\max} = 4P_0$ и низкий уровень отношения $P_{\text{cp}}/P_{\max} = 0,375$ указывают на плохое использование мощности передатчика, который приходится рассчитывать на пиковое значение мощности сигнала P_{\max} , т.е. на режим его кратковременной работы.

1.2 Модуляция произвольным периодическим сигналом.

Периодический модулирующий сигнал $S_{\text{п}}(t)$ может быть представлен рядом Фурье вида:

$$S_{\text{п}}(t) = \frac{U}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\Omega t + \Psi_n),$$

где Ω -основная частота модулирующего сигнала.

Если отнести постоянную составляющую A_0 ряда Фурье к амплитуде несущего колебания A_0 , то огибающую $A(t)$ модулированного колебания можно записать как:

$$A(t) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta A_n \cos(n\Omega t + \Psi_n) \quad (10)$$

где $\Delta A_n = K_A A_n$

Подставляя (10) в (3) и применяя тригонометрические преобразования, получим:

$$A_{\text{AM}}(t) = A_0 \left[\cos(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi + \Psi_n] + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos[(\omega_0 - n\Omega)t + \varphi - \Psi_n] \right],$$

где $M_n = \Delta A_n / A_0$ - парциальные (частичные) коэффициенты модуляции. В выражении (11) первое слагаемое в правой части - несущее колебание с частотой ω_0 , второе и третье - суммы колебаний с частотами $(\omega_0 + n\Omega)$ - верхняя боковая полоса, и $(\omega_0 - n\Omega)$ - нижняя боковая полоса. Нижняя боковая полоса представляет собой зеркальное отражение верхней боковой полосы, т.е. амплитудный спектр модулированного колебания симметричен относительно частоты ω_0 . Каждая спектральная составляющая модулирующего сигнала (9) так же, как при тональной модуляции, создаёт две боковые частоты в спектре

модулированного колебания.

На рис.5а,б изображены модулирующий сигнал $S_n(t)$, представляющий собой последовательность прямоугольных импульсов и его спектр. На рис. 5в представлена последовательность радиоимпульсов, полученная в результате амплитудной модуляции исходного гармонического колебания периодическим сигналом $S_n(t)$ и спектр такого АМ колебания.

Если ширину спектра $\Delta\Omega$ модулирующего колебания определит, как:

$$\Delta\Omega = \Omega_{\max} = m\Omega ,$$

где Ω_{\max} - максимальная частота, которая учитывается в спектре этого сигнала, соответствующая m -ой гармонике, то ширина спектра АМ сигнала равна:

$$2\Delta\omega_{AM} = 2\Omega_{\max}$$

1.3 Модуляция непериодическим сигналом.

В случае модуляции непериодическим сигналом $S(t)$ со спектральной плотностью $G(\omega)$ и огибающую $A(t)$ и АМ колебание $U_{AM}(t)$ можно записать в виде:

$$A(t) = A_0 + K_A S(t) \quad (12)$$

$$U_{AM}(t) = [A_0 + K_A S(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (13)$$

Из теоремы сложения следует, что спектральная плотность $G_A(\omega)$ огибающей (12) есть сумма спектральной плотности $G(\omega)$ непериодического сигнала $S(t)$ (с точностью до множителя K_A) и спектральной плотности постоянной составляющей A_0 , равной $2\pi A_0 \delta(\omega)$ (рис.6а). Спектральная плотность

модулированного колебания $G_{AM}(\omega)$ согласно теореме о смещении спектра определяется выражением:

$$G_{AM}(\omega) = e^{j\varphi} \frac{1}{2} G_A(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi} \frac{1}{2} G_A(\omega + \omega_0) \quad (14)$$

и изображена на рис.6б.

Таким образом, в результате амплитудной модуляции спектральная плотность огибающей, сосредоточенная в области нижних частот,

«раздваивается» и переносится в область высоких частот, смещаясь на

$\pm\omega_0$. Из рис.6 видно, что спектральная плотность $G_{AM}(\omega)$ АМ сигнала имеет две

составляющие: $G_A(\omega - \omega_0) / 2$ и $G_A(\omega + \omega_0) / 2$, сконцентрированные вблизи частот ω_0 и $-\omega_0$, соответственно. Ширина спектра $2\Delta\omega_{AM}$ АМ сигнала вдвое превышает ширину спектра $\Delta\omega_A$ огибающей. Сигнал U_{AM} , соответствующий

спектральной плотности (14) является действительной величиной и определяется преобразованием Фурье от этой функции

$$U_{AM}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{AM}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} G_A(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} G_A(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \quad (15)$$

При этом каждой спектральной составляющей сигнала U_{AM} в области положительных частот ($\omega > 0$) соответствует комплексно-сопряжённая составляющая в области отрицательных частот ($\omega < 0$), как это следует из комплексного представления гармонического колебания:

$$S(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} (Ae^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + Ae^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} Ae^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} Ae^{-j\omega_0 t}$$

Представление (15) можно получить, применяя к (14) одностороннее преобразование Фурье:

$$U_{AM}(t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{AM}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} \int_0^{\infty} G_A(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega + \frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} \int_0^{\infty} G_A(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right\} \quad (16)$$

Здесь рассматривается только действительная часть комплексных спектральных составляющих сигнала U_{AM} в области положительных частот в соответствии с комплексным представлением гармонического колебания. Из рис.6б видно, что для узкополосного процесса вклад, вносимый вторым слагаемым (14), мал и им можно пренебречь (заштрихованная область на рис.6б). Поэтому в окрестности частоты ω_0 можно не учитывать второе слагаемое и определять спектральную плотность АМ сигнала по приближённой формуле:

$$G_{AM}(\omega) \approx \frac{1}{2} e^{j\varphi} G(\omega - \omega_0) \quad (17)$$

соответствующей правой ветви на рис.6б. Сигнал U_{AM} будет описываться первым слагаемым формулы (16) одностороннего преобразования Фурье:

$$U_{AM}(t) \approx \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{j\varphi} G_A(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \quad (18)$$

2. Балансная и однополосная модуляция

Кроме обычной АМ применяется амплитудная модуляция без несущей – балансная амплитудная модуляция (БАМ). Балансно – модулированное колебание получается путём перемножения модулирующего колебания $U(t)$ и гармонической несущей

$$U_{БМ}(t) = U(t) \cos \omega_0 t = aS(t) \cos \omega_0 t, \quad a = \text{const} \quad (19)$$

где $U(t)=aS(t)$ – огибающая модулированного колебания (19), $\max |S(t)| = 1$. Для сравнения на рис.7 изображены временные диаграммы U_{AM} и $U_{БМ}$ при модуляции гармоническим сигналом $S(t)$, построенные на основании выражений (7) и (19).

Спектральную плотность колебания при балансной модуляции $G_{БМ}(\omega)$ так же, как и АМ колебания при модуляции произвольным непериодическим сигналом $S(t)$, можно выразить через спектральную плотность огибающей. Полагая, что огибающей $U(t)=aS(t)$ соответствует спектральная плотность $G_u(\omega)$, получим:

$$G_{БМ}(\omega) = \frac{1}{2} [G_u(\omega - \omega_0) + G_u(\omega + \omega_0)] \quad (20)$$

т.е. спектр сообщения, соответствующий (с точностью до коэффициента a) спектру огибающей, в результате модуляции «раздваивается», т.е. смещается по оси частот на $\pm\omega_0$ а его ординаты уменьшаются в два раза. Ширина спектра БМ колебания увеличивается в 2 раза, по сравнению с шириной спектра сообщения. Поскольку в спектре БМ колебания отсутствует несущая, то спектральная плотность модулированного

колебания $G_{БМ}(\omega)$ не содержит дискретные компоненты (δ -функции) на частоте ω_0 , имеющейся в спектре АМ – колебания (рис. 6б).

Система БМ позволяет сократить расход мощности на передачу сообщения из-за отсутствия

в спектре колебания несущей частоты ω_0 . Если модулирующий сигнал $S(t)$ содержит постоянную составляющую, то в спектре БМ – колебания возникает компонента несущей частоты.

При БМ так же, как и при АМ, передаётся избыточная информация, поскольку спектр сообщения $\Delta\omega_u$ расширяется в 2 раза (рис.8а, б). Для восстановления модулирующего сигнала достаточно сохранить в спектре сигнала лишь одну боковую полосу: либо верхнюю (рис.8в), либо нижнюю (рис.8г). В обоих случаях спектр остаётся симметричным относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат. Следовательно, любой из этих спектров соответствует реальному сигналу.

Для передачи боковых полос в этом случае требуется только половина полосы частот ($\Delta\omega_u$, вместо $2\Delta\omega_u$ при БМ). Такой способ передачи, называемый однополосной модуляцией (ОМ) с подавлением несущей, позволяет максимально сократить полосу, занимаемую сигналом по оси частот.

В общем случае с ОМ можно записать в виде:

$$U_{OM}(t) = \frac{U_0}{2} \left[S(t) \cos \omega_0 t \pm S(t) \sin \omega_0 t \right] \quad (21)$$

где знак «+» соответствует однополосному сигналу с нижними боковыми полосами; а «-» - с верхними; U_0 – амплитуда несущего колебания; $S(t)$ - сигнал, сопряжённый сигналу $S(t)$ по Гильберту таким образом, что фазы всех его спектральных компонент сдвинуты на $\frac{\pi}{2}$ по отношению к компонентам спектра сигнала $S(t)$.

Спектральная плотность $G_{OM}(\omega)$ сигнала с ОМ записывается как:

$$G_{OM}(\omega) = \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[G_U(\omega - \omega_0) + G_U(\omega + \omega_0) \right] \pm \frac{1}{2} \left[G_U(\omega - \omega_0) \text{sign}(\omega - \omega_0) - G_U(\omega + \omega_0) \text{sign}(\omega + \omega_0) \right] \right\} \quad (22)$$

Знак минус в выражении (22) соответствует спектру с подавленными верхними боковыми полосами (рис.8г), а знак плюс – с подавленными нижними (рис.8в). При приёме БМ и ОМ колебаний необходимо восстанавливать колебание несущей частоты $U_0 \cos \omega_0 t$, что усложняет приёмник.

2. Частотная и фазовая модуляция.

2.1 Общие соотношения.

При угловой модуляции под действием модулирующего сигнала происходит изменение фазового сигнала $\varphi(t)$ несущего колебания (1) при постоянной амплитуде U_0 . Модулированное колебание (2) принимает вид

$$U(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos \phi(t) \quad (23)$$

или в комплексной форме:

$$U(t) = U(t)e^{j\omega_0 t} \quad (24)$$

где $U(t) = U_0 e^{j\varphi(t)}$ - комплексная огибающая колебания.

На комплексной плоскости колебание (23) отображается вектором OA длиной U_0 (рис.9). Если плоскость вращается с постоянной угловой частотой, то начальная фаза $\varphi(t)$ вектора

OA , в отсутствие модуляции постоянная и равная φ , медленно изменяется в процессе модуляции. Мгновенное значение модулированного колебания (23) определяется проекцией

$U(t)$ вектора OA на вращающуюся действительную ось.

Изменение фазового сдвига $\varphi(t)$ происходит как при модуляции мгновенной частоты $\omega(t)$,

так и при модуляции непосредственно фазового сдвига $\varphi(t)$ колебания (23). Поэтому различают два вида угловой модуляции: частотную (ЧМ) и фазовую модуляцию (ФМ). При частотной модуляции имеет место линейная связь между мгновенной частотой $\omega(t)$

колебания (23) и модулирующим сигналом $S(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_g S(t) \quad (25)$$

где ω_g - девиация частоты, т.е. максимальное отклонение частоты $\omega(t)$ от ω_0 .

Полная фаза $\Phi(t)$ ЧМ колебания определяется как интеграл от мгновенной частоты (25)

$$\Phi(t) = \int \omega(t) dt + \varphi = \int [\omega_0 + \omega_g S(t)] dt + \varphi = \omega_0 t + \omega_g \int S(t) dt + \varphi = \omega_0 t + \varphi(t) \quad (26)$$

где фазовый сдвиг

$$\varphi(t) = \omega_g \int S(t) dt + \varphi \quad (27)$$

При этом ЧМ колебание принимает вид:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \omega_g \int S(t) dt + \varphi] \quad (28)$$

Таким образом, фазовый сдвиг $\varphi(t)$ ЧМ колебания изменяется по закону интеграла от модулирующего сигнала $S(t)$.

Частотно-модулированный сигнал можно получить на выходе частотного модулятора, в

котором модулирующий сигнал $S(t)$ либо непосредственно управляет частотой $\omega(t)$ несущего колебания в соответствии с выражением (25), либо после интегрирования управляет фазовым сдвигом $\varphi(t)$ несущего колебания согласно выражению (27). При фазовой модуляции в соответствии с модулирующим сигналом $S(t)$ изменяется фазовый сдвиг:

$$\varphi(t) = \varphi + mS(t) \quad (29)$$

где φ - начальная фаза немодулированного колебания, m – индекс угловой модуляции, т.е. максимальное отклонение фазы колебания (23) от начальной фазы φ . Учитывая (29), полную фазу $\Phi(t)$ модулированного колебания (23) можно определить по формуле:

$$\Phi(t) = \omega_0 t + mS(t) + \varphi \quad (30)$$

При этом фазомодулированное колебание принимает вид:

$$U_{\Phi M}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + mS(t) + \varphi] \quad (31)$$

Мгновенная частота ФМ колебания равная:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + m \frac{dS(t)}{dt} \quad (32)$$

изменяется по закону производной от модулирующего сигнала $S(t)$. Следовательно, ФМ сигнал можно получить на выходе фазового модулятора, в котором модулирующий сигнал $S(t)$ либо непосредственно управляет фазовым сдвигом $\varphi(t)$ несущего колебания согласно выражению (29), либо после дифференцирования управляет угловой частотой $\omega(t)$ несущего колебания в соответствии с (23).

Ограничимся рассмотрением ЧМ и ФМ колебаний при модуляции гармоническим сигналом:

$$S(t) = S \cos \Omega t \quad (33)$$

Сравним основные характеристики сигналов с ЧМ и ФМ

ЧМ колебание	ФМ колебание
Согласно (25)	Согласно (29)
$\omega_g = \omega_0 + \omega_g \cos \Omega t$ (34)	$\varphi(t) = \varphi + ms \cos \Omega t$ (39)
Здесь $\omega_g = K_{\text{ЧМ}} S$, т.е. девиация частоты ЧМ колебания пропорциональна амплитуде S модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω . Тогда	Здесь $m = K_{\text{ФМ}} S$, т.е. индекс угловой модуляции ФМ колебания пропорционален амплитуде S модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω . Тогда:
$\Phi(t) = \int [\omega_0 + \omega_g \cos \Omega t] dt + \varphi = \omega_0 t +$	

<p style="text-align: right;">(35) 48</p> $+ \omega_g \int \cos \Omega t dt + \varphi = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi$ <p>Соответственно</p> $\varphi(t) = m \sin \Omega t + \varphi \quad (36)$ <p>где $m = \omega_g / \Omega$</p> <p>Т.е. индекс угловой модуляции m ЧМК пропорционален амплитуде модулирующего сигнала и обратно пропорционален частоте модуляции. С учётом (23) и (35) имеем:</p> $U_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi) \quad (38)$	$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + m \cos \Omega t + \varphi \quad (40)$ $\omega(t) = \frac{d}{dt} [\omega_0 t + \varphi(t)] = \omega_0 - m \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \omega_g \sin \Omega t \quad (41)$ <p>где $\omega_g = m \Omega$ (42)</p> <p>Следовательно, девиации частоты ω_g ФМК пропорциональна амплитуде и частоте модулирующего сигнала. С учётом (23) и (40) имеем:</p> $U_{\text{ФМ}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \varphi) \quad (43)$
---	---

Из выражений (38) и (43) видно, что при тональной модуляции нельзя определить, является ли сигнал частотно или фазомодулированным. Различие между этими видами модуляции проявляется только при изменении частоты

модуляции Ω . При ЧМ с увеличением Ω девиация частоты ω_g остаётся постоянной, а индекс модуляции m в соответствии (37) уменьшается по закону гиперболы, в то время как при ФМ постоянным остаётся индекс модуляции, а девиация частоты ω_g

растёт по линейному закону (рис.10а, б).

Если модулирующий сигнал $S(t)$ негармонический, то ЧМ и ФМ различаются по характеру

изменения параметров $\omega(t)$ и $\varphi(t)$. На рис.11 приведены графики мгновенной частоты $\omega(t)$ и фазы $\varphi(t)$ ЧМ и ФМ колебаний для случая, когда модулирующий сигнал имеет вид

пилообразной функции. Как следует из рис.11б,е угловая частота ЧМ сигнала изменяется монотонно в соответствии с модулирующим сигналом $S(t)$, тогда как частота $\omega(t)$ ФМ сигнала изменяется скачками.

На рис.12 построена векторная диаграмма колебания с угловой модуляцией

$u = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$. Вектор \vec{OA} длиной U_0 отображающий модулированное колебание в произвольный момент времени располагается под углом $\varphi(t)$ к начальному положению оси проекции. Если модуляция осуществляется гармоническим сигналом, то функции $\varphi(t)$ и $d\varphi(t)/dt$ как при ЧМ, так и при ФМ изменяются также по гармоническому

закону. Следовательно, в обоих случаях вектор \vec{OA} качается с мгновенной угловой частотой

около своего среднего положения OA , составляющего угол φ с начальным положением оси проекции, отклоняясь в обе стороны на m радиан.

Спектр колебания при гармонической угловой модуляции Как уже указывалось, модулированное колебание, представленное в виде:

$$u = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t + \Psi) + \varphi] \quad (44)$$

в равной степени соответствует ЧМ и ФМ колебаниям.

Чтобы найти спектральный состав этого колебания при любом значении модуляции m , воспользуемся соотношениями, известными из теории Весселевых функций:

$$\exp(jm \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp(jnx) \quad (45)$$

где $J_n(m) = \frac{j^{n\pi}}{\pi} \int_0^\pi \exp(jm \sin x) \cos nx dx$ - функция Бесселя первого рода n -го порядка от действительного аргумента m . При целом n имеет место равенство:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (46)$$

Колебание (44) является действительной частью комплексного сигнала

$$\begin{aligned} u &= U_0 \operatorname{Re}\{\exp j[\omega_0 t + \varphi + m \sin(\Omega t + \Psi)]\} = \\ &= U_0 \operatorname{Re}\{\exp j(\omega_0 t + \varphi) \exp jm \sin(\Omega t + \Psi)\} \end{aligned}$$

Принимая во внимание (45), получим:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \infty \\ \left. U_0 \operatorname{Re}\left\{ \exp j(\omega_0 t + \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp jn(\Omega t + \Psi) \right\} \right| \right. \\ \left. \right]_{-\infty} \\ &= U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \operatorname{Re}\{\exp j[(\omega_0 + n\Omega)t + n\Psi + \varphi]\} \end{aligned}$$

Окончательно с учётом (46):

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0 J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\Omega)t + n\Psi + \varphi] = \\ &= U_0 J_0(m) \cos(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} U_0 J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\Omega)t + n\Psi + \varphi] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_0 J_n(m) \cos[(\omega_0 - n\Omega)t - n\Psi + \varphi] \end{aligned} \quad (47)$$

Выражение (47) представляет собой разложение колебания и с угловой модуляцией на гармонические составляющие. Спектр колебания, изображённый на рис.13, состоит из бесконечного числа боковых составляющих, расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты ω_0 и имеющих частоты $(\omega_0 \pm n\Omega)$. Согласно (46) нечётные верхние и нижние боковые составляющие находятся в противофазе. Амплитуда n -ой боковой составляющей равна $U_0 J_n(m)$, т.е. при заданном индексе модуляции m пропорциональна $|J_n(m)|$. Поскольку функции Бесселя осциллируют с изменением m (рис.14), то амплитуды спектра с увеличением порядка n функции убывают не монотонно.

Теоретически колебание с угловой модуляцией занимает бесконечную полосу частот. Однако для заданного индекса модуляции m абсолютное значение функции Бесселя $|J_n(m)|$ быстро уменьшается с увеличением n и практически можно не учитывать боковые составляющие порядка $n=m+2$ и выше из-за малости их амплитуд.

Ширина спектра $2\Delta\omega$ колебания, ограниченного $(m+1)$ парой боковых составляющих, выражается приближённым равенством:

$$2\Delta\omega \approx 2\Omega(m+1) \quad (48)$$

а при $m \gg 1$ примерно равна удвоенному значению девиации частоты

$$2\Delta\omega \approx 2m\Omega = 2\omega_g \quad (49)$$

При малом индексе модуляции $m \ll 1$ можно положить $J_0(m) \approx 1$, $J_1(m) \approx m/2$ и пренебречь значениями функции Бесселя более высоких порядков. Выражение (47) принимает вид приближённого равенства:

$$u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} mU \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \Psi + \varphi] - \frac{1}{2} mU \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \Psi + \varphi] \quad (50)$$

В соответствии с (50) на рис.15а изображён спектр амплитуд и фаз. Структура спектра оказывается такой же, как и в случае АМ колебания с тональной модуляцией (см. рис.3), однако фаза нижней боковой составляющей отличается на π радиан. Ширина спектра равна удвоенной частоте модуляции, т.е.

$$2\Delta\omega = 2\Omega.$$

На векторной диаграмме колебания (50), приведённой на рис.15б, сумма

векторов \vec{CM} и \vec{CN} боковых составляющих образует вектор \vec{CD} , который в отличие от АМ колебания перпендикулярен вектору \vec{OC} . Векторная диаграмма показывает, что наряду с изменением фазы вектора \vec{OD} , отображающего результирующее колебание (50), изменяется и его длина, т.е. амплитуда модулированного колебания. Это есть следствие ограничения спектра колебания (47) первой парой боковых составляющих.

Однако, поскольку $m \ll 1$, изменение длины вектора \vec{OD} незначительно.

При изменении амплитуды S модулирующего сигнала ($\Omega = const$) в ЧМ и ФМ колебаниях изменяется число боковых составляющих, ширина спектра $2\Delta\omega = 2\Omega(m + 1)$ и амплитуды $U_0 J_n(m)$ составляющих спектра.

При изменении частоты модуляции Ω ($S = const$) в случае ЧМ изменяется согласно (37) индекс модуляции m , следовательно, число и амплитуда составляющих спектра. Ширина спектра $2\Delta\omega_{ЧМ}$ практически не меняется. При ФМ амплитуды составляющих и их число остаются без изменения (т.к. $m = const$), а ширина спектра $2\Delta\omega_{ФМ}$ изменяется пропорционально частоте модуляции.

Определим среднюю мощность сигнала с угловой модуляцией. Средняя мощность P_0 , рассеиваемая немодулированным колебанием в нагрузке R , равна

$$P_0 = \frac{U^2}{2R} \quad \text{Средняя мощность } P_n \text{ } n\text{-ой боковой составляющей колебания (44)}$$

выражается как:

$$P_n = \frac{1}{R} [J_n(m)U]^2$$

2

Средняя мощность радиосигнала (44) есть сумма мощностей всех гармонических составляющих

$$P = \frac{1}{R} U^2 [J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + \dots + 2J_n^2(m) + \dots]$$

В теории Бесселя функций доказывалось, что $J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + \dots + 2J_n^2(m) + \dots = 1$. Поэтому

$$P = \frac{1}{R} U^2 = P_0 \quad (51)$$

Таким образом, в результате угловой модуляции при любом значений m происходит перераспределение мощности между несущей и всеми боковыми составляющими, суммарная же мощность равна мощности немодулированного колебания. Следовательно, передатчик, излучающий ЧМ (ФМ) радиосигналы, работает в режиме постоянной мощности.

Выполнение работы:

1. Задать гармонический модулирующий сигнал.
2. Изменяя уровень индекс АМ от 0 до 1 получить зависимость уровня боковых составляющих и несущей от M .
3. Построить типовой спектр АМ колебания с $m=0.5$, а также графики зависимостей ждущей частоты и боковых колебаний от N .
4. Задать негармонический модулирующий сигнал. Зарисовать вид модулирующей функции и спектр сигнала при АМ.
5. Выбрать балансную модуляцию и построить спектры БМ колебания при гармонической и негармонической модуляции.
6. Выбрать частотную модуляцию. Изменяя индекс модуляции в пределах от 0 до 10 получить типичные спектры для 4-5 случаев при гармонической модуляции. Построить полученные графики.
7. Выбрать ЧМ и негармонический модулирующий сигнал. Построить 2-3 спектра для различных m . Сопоставить результаты с полученными в п.6.
8. Выбрать ФМ и повторить п.7.
9. Оформить отчёт, проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы:

1. Что понимается под несущим и модулирующим колебаниями? В чём заключается процесс модуляции?
2. Как записать АМ колебание при модуляции: а) гармоническим колебанием; б) произвольным периодическим колебанием; в) непериодическим сигналом?
3. Как определяется коэффициент модуляции АМ колебаний?
4. Какой вид имеет векторная диаграмма АМ колебания при тональной модуляции?
5. Как формируется спектр АМ колебания при модуляции: а) гармоническим колебанием; б) произвольным периодическим колебанием; в) непериодическим сигналом?
6. Как выражается пиковая и средняя мощность АМ колебания?
7. В чём состоит отличие БМ и ??? от АМ колебания?
8. Запишите выражение для колебания с угловой модуляцией. Какими соотношениями связаны полная фаза и мгновенная частота колебания?

9. Как определяются и чем отличаются ЧМ и ФМ колебания?

10. Какой физический смысл имеют понятия «девиация частоты» ω_g и «индекс модуляции» m ? Как они определяются при частотной и фазовой модуляции гармоническим сигналом?

11. Изобразите векторную диаграмму колебания с угловой модуляцией.

12. От каких параметров модулирующего гармонического сигнала и как зависят спектры ЧМ, ФМ и АМ колебаний?

13. По каким приближённым формулам можно определить ширину спектра ЧМ и ФМ колебаний при гармонической модуляции в случаях $m \ll 1$ и $m > 1$?

14. Чем отличаются спектральные и векторные диаграммы АМ и ЧМ колебаний при $m \ll 1$?

15. Чему равна средняя мощность колебания с угловой модуляцией?

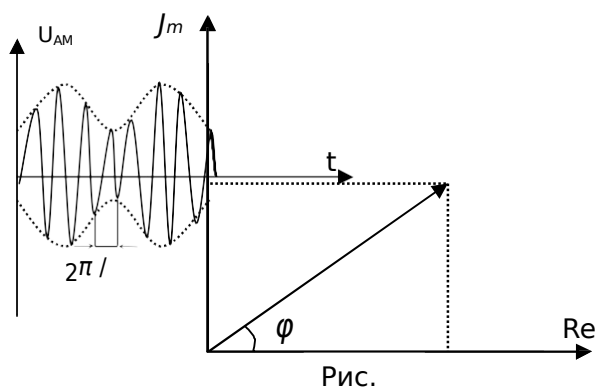
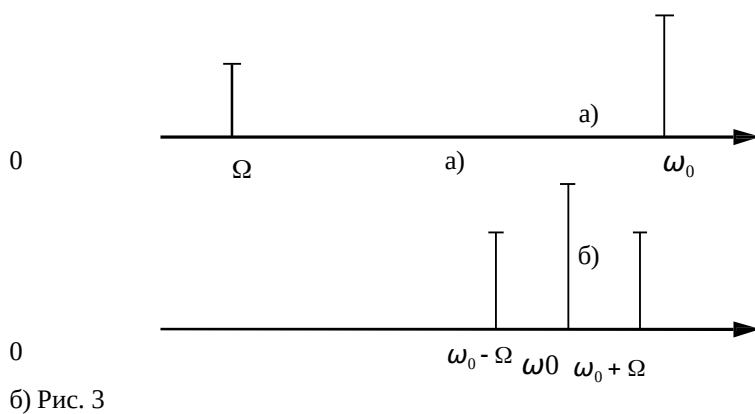


Рис.2



б) Рис. 3

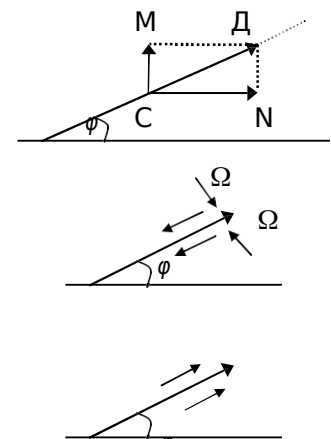
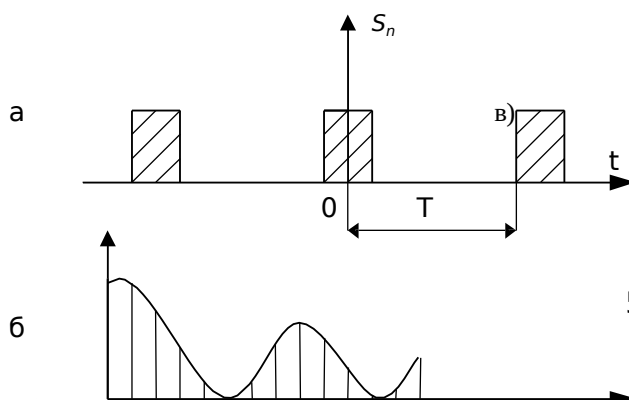


Рис. 4



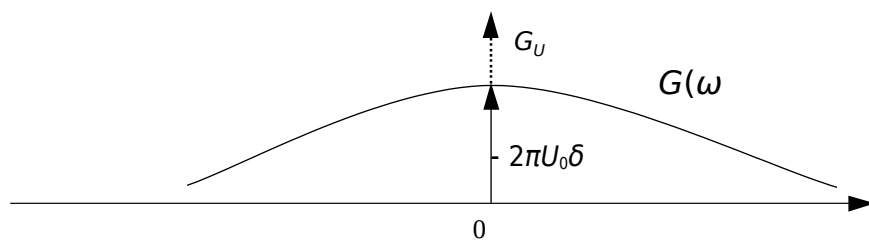
ω_0

г)



Рис. 5

а)



б)

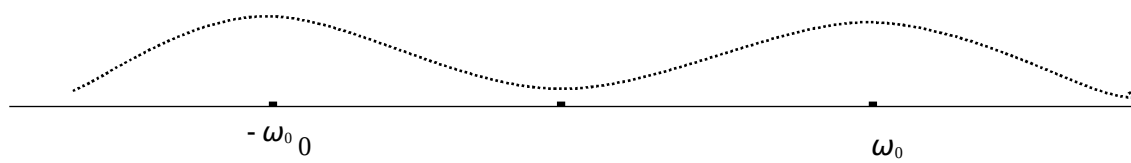
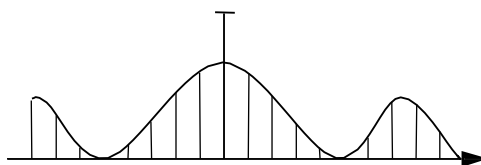


Рис. 6



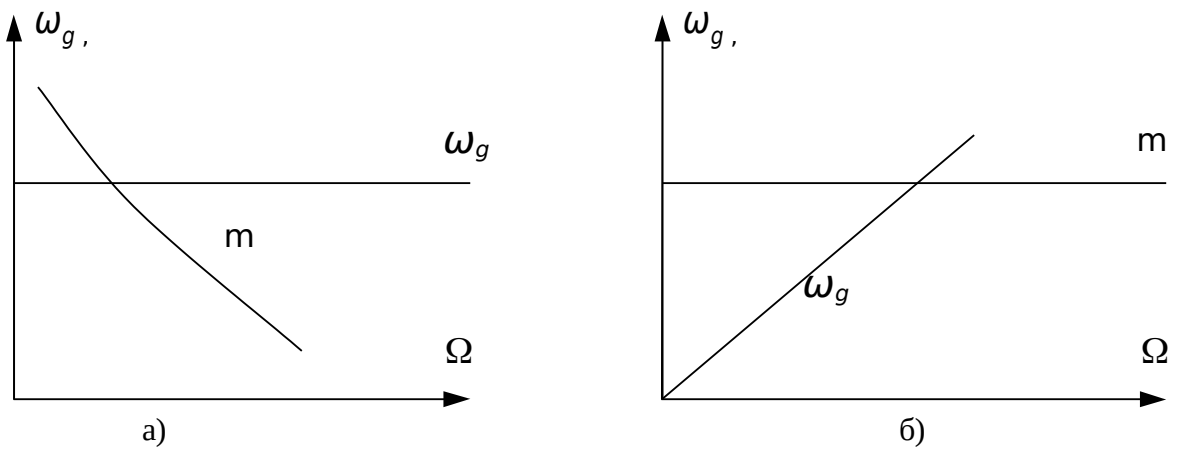
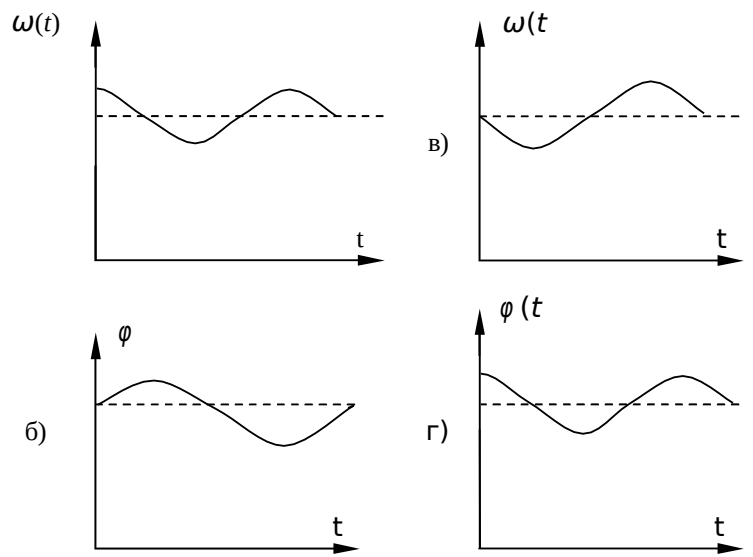
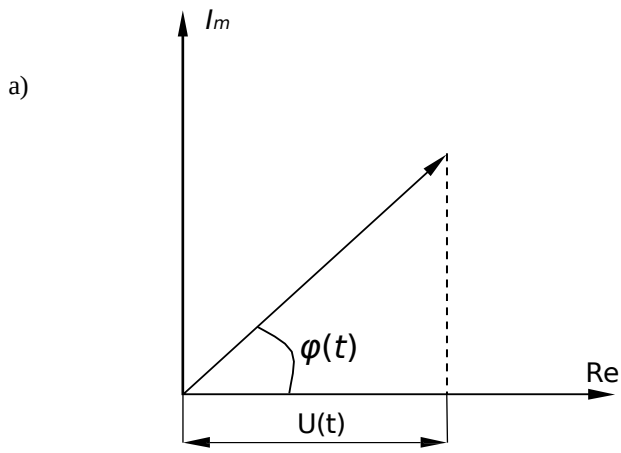
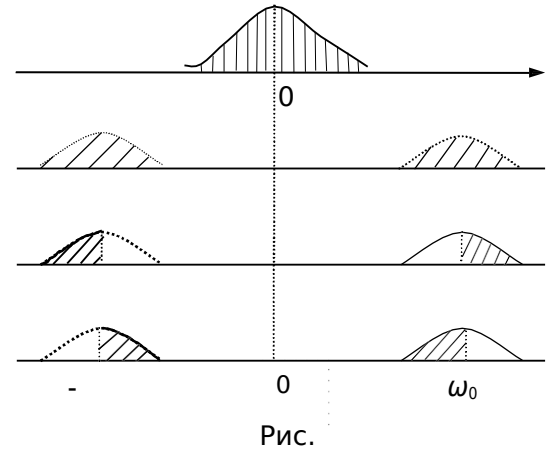
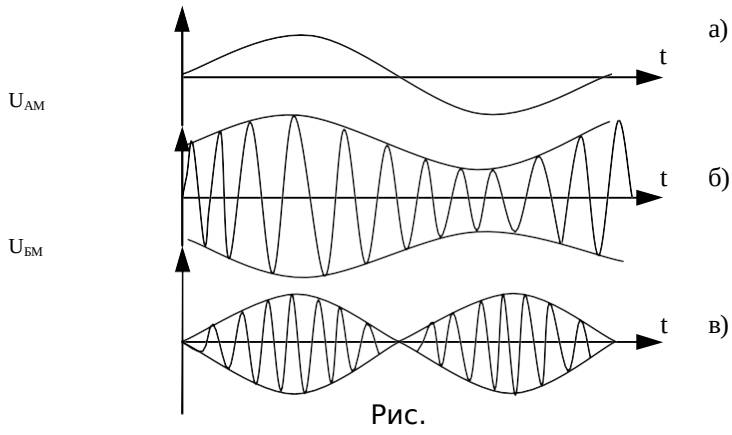


Рис. 11

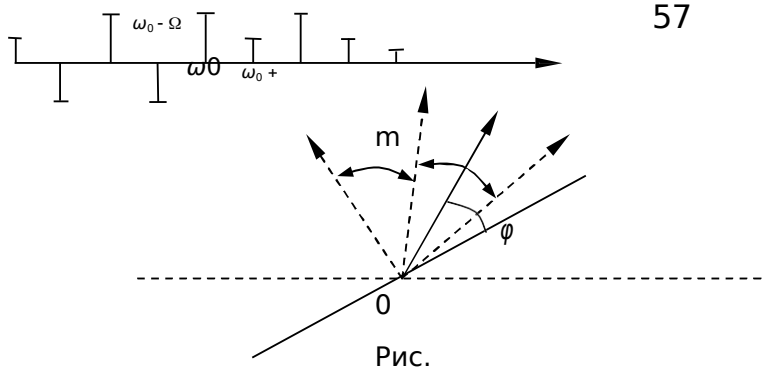


Рис. 13

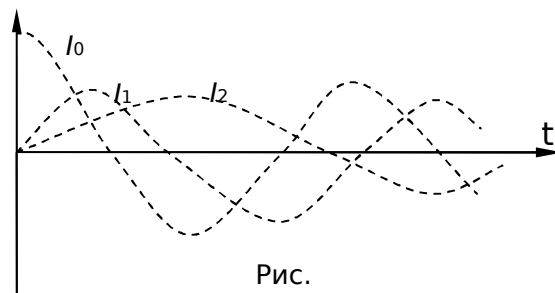


Рис.

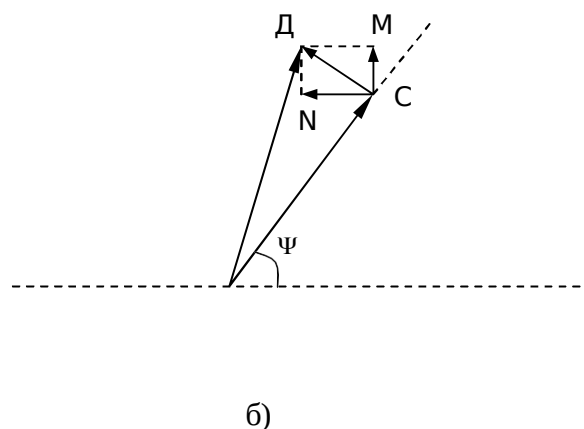
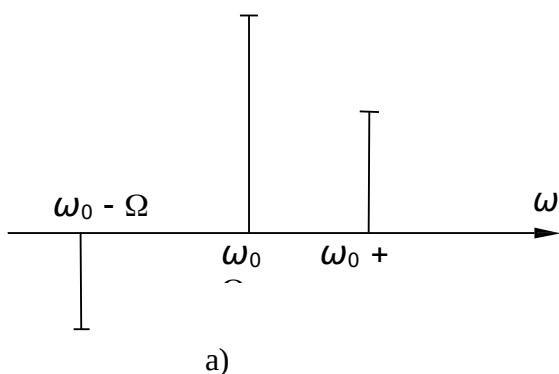


Рис. 15

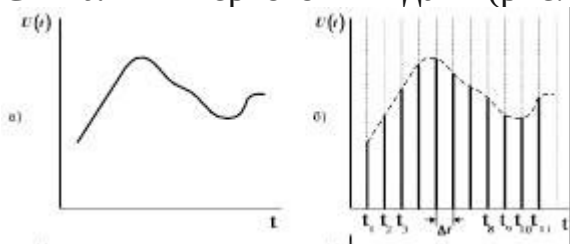
Практическая работа Расчет параметров сигналов с импульсной модуляцией

Цель: По заданной методике научиться определять шаг квантования и разрядность кода.

Теоретические сведения

По характеристикам, в зависимости от области определения и области возможных значений функции различают следующие виды сигналов (рис. 1.)

Сигналы первого вида (рис. 1 а),



называе

мые **непрерывными**, задаются на конечном или бесконечном временном интервале и могут принимать любые значения в некотором диапазоне. Примером

является сигнал на выходе микрофона. Такие сигналы часто называются **аналоговыми**.

Сигналы второго вида - **непрерывные по уровню и дискретные по времени** (рис. 1 б). Дискретизация по времени обычно выполняется путем взятия отсчетов непрерывной по времени функции $U(t)$ в определенные дискретные моменты времени $t_i, i = 1, 2, \dots$. В результате непрерывную функцию $U(t)$ заменяют совокупностью мгновенных значений $U(t_i), i = 1, 2, \dots$. Дискретизация по времени лежит в основе всех видов импульсной модуляции.

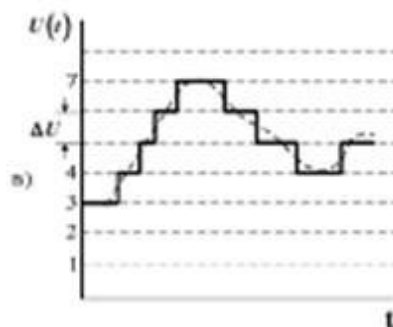
Интервал дискретизации заданного сигнала по времени определяется на основе теоремы Котельникова по неравенству:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \cdot F_{\varepsilon}} \quad (1)$$

где F_{ε} - верхнее значение частоты спектра сигнала. (Гц.)

$$F_{\varepsilon} = \frac{\omega_{\varepsilon}}{2 \cdot \pi}$$

Дискретизация значений непрерывной функции $U(t)$ по уровню называется амплитудным квантованием. В результате квантования непрерывный сигнал заменяется ступенчатой функцией. Шаг квантования ΔU (расстояние между двумя соседними разрешенными уровнями) может быть, как постоянным, так и переменным. Его обычно выбирают из условий обеспечения требуемой точности восстановления непрерывного сигнала из квантованного.



Разрядность кодов определяется исходя из

динамического $U_{\min} = \frac{U_{\max}}{K}$ диапазона квантуемых

по уровню импульсных отсчетов. При этом в качестве верхней границы динамического диапазона принимается напряжение самого большого по амплитуде отсчета. Нижняя граница диапазона

где K - коэффициент усиления (согласно заданию).

Для самого малого по амплитуде импульсного отсчета задается соотношение мгновенной мощности сигнала и мощности шума квантования:

$$\gamma = \frac{U_{\text{MIN}}^2}{P_{\text{ш.кв}}}$$

(2)

где: $P_{\text{ш.кв}}$ - мощность шумов квантования при размерной шкале квантования, Вт.

Известно, что:

$$P_{\text{ш.кв}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

(3)

где: Δ - шаг шкалы квантования.

В свою очередь:

$$\Delta = \frac{U_{\text{MAX}}}{n_{\text{кв}}}$$

(4)

где: Δ - шаг шкалы квантования;

$n_{\text{кв}}$ - число уровней квантования;

U_{MAX} - верхняя граница динамического диапазона, В.

С учетом этого:

$$\gamma = \frac{U_{\text{MIN}}^2 \cdot 12 \cdot n_{\text{кв}}^2}{U_{\text{MAX}}^2}$$

(5)

где: $n_{\text{кв}}$ - число уровней квантования;

U_{MIN} - нижняя граница динамического диапазона, В;

U_{MAX} - верхняя граница динамического диапазона, В.

Из (3.6) получаем:

$$n_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot U_{\text{MAX}}^2}{12 \cdot U_{\text{MIN}}^2}} = \frac{U_{\text{MAX}}}{U_{\text{MIN}}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{12}}$$

(6)

Известно, что при использовании двоичного кодирования число кодовых комбинаций, равное числу уровней квантования, определяется выражением:

$$n_{\text{кв}} = 2^m$$

(7)

где: m - разрядность кодовых комбинаций.

Отсюда:

$$m = \log_2 n_{\text{кв}}$$

(8)

Длительность элементарного кодового импульса определяется исходя из интервала дискретизации и разрядности кода по выражению

$$\tau_{\text{н}} = \frac{\Delta t}{2 m} \quad ,\text{с}$$

(9)

Порядок выполнения работы

1. Выписать данные согласно варианта из таблицы 2
2. Определить верхнее значение частоты спектра сигнала Рассчитать интервал дискретизации по уравнению 1
3. Нарисовать график дискретизированного во времени сигнала. **Форму графика взять из примера или свободную.** В момент времени «0» значение $U(t)$, (В) равно максимальному напряжению из задания. Заполнить верхнюю строку таблицы, добавляя каждый раз вычисленное приращение дискрета Δt . На графике разбить ось Ox на 8 **одинаковых** частей. Каждой следующей отметке придается следующее значение из строки дискрета времени. Из каждого дискрета времени на графике провести перпендикуляр. Точка пересечения графика с перпендикуляром даст значение функции (напряжение) в этот момент. Вертикальная ось Oy графика должна быть линейно разделена на удобные для отсчета отрезки.
4. Заполнить таблицу зависимости данного сигнала от времени.
5. По полученным данным сделать выводы.

Таблица 1 - Зависимость сигнала от времени

приращени е дискрета времени Δt (сек)	0								
Значение функции $U(t)$, (В)									

Номер варианта	Циклическая частота $\dot{\omega}_c$	Амплитуда U_{max}
1	628	1,0
2	942	0,8
3	1256	0,6
4	15700	0,4
5	18840	0,3
6	21980	0,5
7	251200	0,7
8	282600	0,9
9	345400	1,1

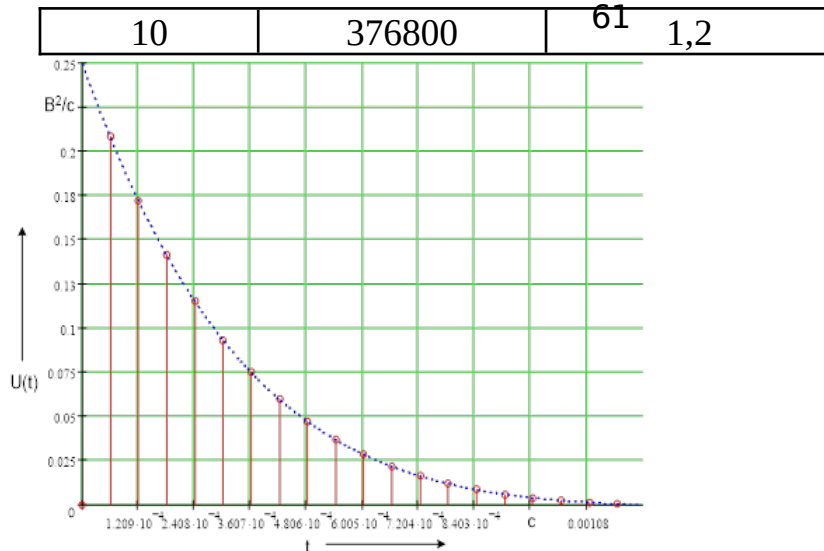


Рис 2 Пример оформления графика

6. Данные для расчета берутся из приложения согласно варианта
7. Найти нижнюю границу динамического диапазона по формуле 1.
8. Найти число уровней квантования по формуле 6.
9. Найти шаг шкалы квантования по формуле 4.
10. Найти мощность шумов квантования по формуле 3.
11. Найти соотношение мощности сигнала к мощности шума квантования по формуле 2.
12. Найти разрядность кодовых комбинаций по формуле 8.
13. Найти длительность элементарного кодового импульса по формуле 9.
14. Заполнить таблицу результатов в таблице 1.
1. Вывод о проделанной работе

Таблица 1

Коэффициент усиления K	Максимальное напряжение U_{max} (В)	Минимальное напряжение U_{min} (В)	Число уровней квантования n_{кв}	Шаг шкалы квантования D	Мощность шумов квантования P_{ш-кв}	Соотношение γ	Разрядность кодовых комбинаций m	длительность элементарного кодового импульса τ

Контрольные вопросы

1. Что означает термин «дискретизация сигнала».
2. Чем отличается дискретизация сигнала по времени от дискретизации по уровню.
3. Откуда берется шум квантования
4. Как можно уменьшить шум квантования
5. Как влияет динамический диапазон на разрядность квантованного сигнала.

Номер варианта	Коэффициент усиления K	Соотношение γ	Максимальное напряжение U_{max} (В)
1	25	17	1,0
2	43	1,23	0,8
3	80	0,37	0,6
4	62	0,05	0,4
5	71	0,6	0,3
6	39	2,74	0,5
7	68	1,16	0,7
8	91	0,98	0,9
9	29	4,41	1,1
10	46	1,44	1,2

Практическая работа
Расчет характеристик цифровых сигналов

Занятие № 1. Аналого-цифровое преобразование сигналов.
Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье

1.1. Методические рекомендации студенту:

1. Ознакомьтесь с дискретизацией непрерывных сообщений, базисом Котельникова и теоремой Котельникова по учебнику [5, с. 376-381].
2. Ответьте на вопросы по теоретическому материалу:
 - 1) Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени? Чем определяется интервал дискретизации?
 - 2) Как формулируется теорема Котельникова?
 - 3) Какой вид имеет спектр дискретного сигнала? Чем он отличается от спектра исходного непрерывного сигнала?
 - 4) Нарисуйте структурную схему устройства ЦОС. Поясните этапы преобразования сигнала.
 - 5) Что такое импульсно-кодовая модуляция?
 - 6) Запишите формулы прямого и обратного дискретного преобразования Фурье.

1.2. Задания и примеры для аудиторной работы

Пример 1.1. Запишите ИКМ-сигнал для значений аналогового сигнала U_k ($k = 1,6$), заданных в таблице 1.1, если интервал квантования $\Delta U = 3$ мВ, а частота сигнала меняется в диапазоне от 50 Гц до 6 кГц

k	1	2	3	4	5	6
$U_{k, \text{МВ}}$	36,2	31,4	18,7	13,2	19,1	24,6

Решение.

1. Интервал дискретизации ИКМ-сигнала согласно теореме Котельникова:

$$\Delta t = 1 / 2f_{\max} = 1 / (2 \cdot 6,3 \cdot 10^3) = 0,079 \cdot 10 \text{с} = 79 \text{ мкс.}$$

2. Число уровней квантования находим по формуле:

$$N_{\text{кв}} = \lceil U_{\max} / \Delta U + 1 \rceil = \lceil 36,2 / 3 + 1 \rceil = \lceil 13,06 \rceil = 14,$$

где $\lceil \dots \rceil$ - операция округления до ближайшего большего целого.

3. Аналогично определяем число разрядов при кодировании двоичным кодом:

$$n = \lceil \log_2 N_{\text{кв}} \rceil = \lceil \log_2 14 \rceil = 4.$$

4. Квантованные значения сигнала, число уровней квантования N_k для каждого отсчета, а также соответствующие им коды сведены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

k	1	2	3	4	5	6
$U_{k, \text{МВ}}$	36	30	18	12	18	24
N_k	12	10	6	4	6	8
n_k	1100	1010	0110	0100	0110	1000

Пример 1.2. Для простейшего дискретного сигнала в виде одного отсчётного значения с амплитудой A найти его спектр.

Решение. Для $x(0) = a; N = 1$: подставляя в выражение для ДПФ (1.1), имеем при $n=0$

$$C_0 = \sum_{k=0}^1 x_k e^{-j 2\pi n k / 1} = A.$$

$k=0$

После подстановки C_0 в выражение для ОДПФ, получим что $x(k) = A\delta(k)$. Графики сигнала (а) и спектра (б) приведены на рис. 1.1.

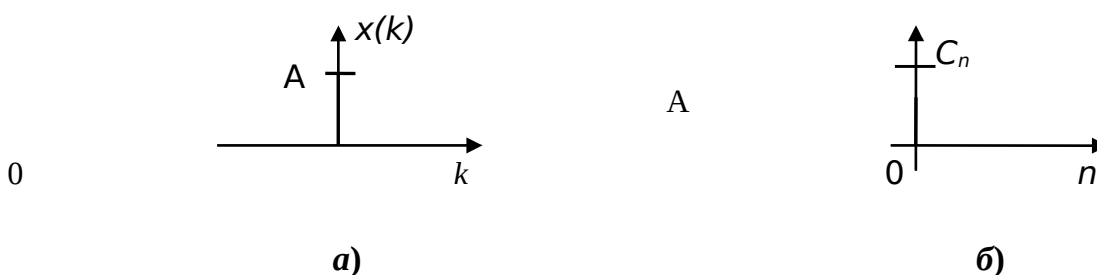


Рис. 1.1

Пример 1.3. Дискретный сигнал представлен 2-мя отсчётами. $x(n) = \{A, B\}$ или $x(0)=A; x(1)=B$ (см. рис. 1.2,а). Определите спектр ДС. Найдите ОДПФ.

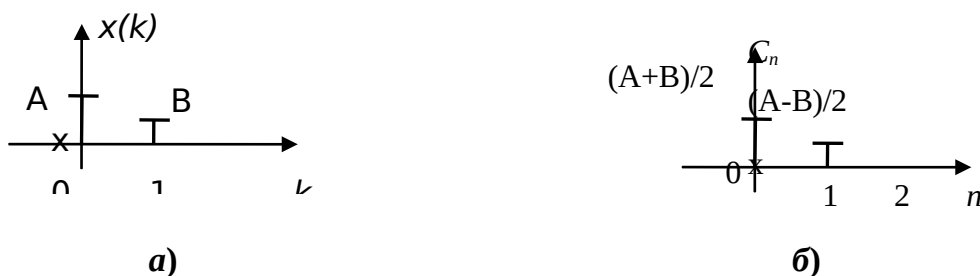


Рис. 1.2

Решение. Подставляя в выражение для ДПФ (1.1)

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (1.1)$$

значения $x(k) = A\delta(k) + B\delta(k-1)$ и $N=2$ получим при $N=2$

$$C_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 (x(k) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot k / 2}) = \frac{1}{2} (A + B), \quad C_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 (x(k) e^{-j\pi k}) = \frac{1}{2} (A - B).$$

График спектра дискретного сигнала приведен на рис. 1.2, б. Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) вычисляем по формуле:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1.2)$$

После подстановки в (1.2) значений C_0 и C_1 имеем в общем виде:

$$x_k = \frac{1}{2} \left[(A+B)e^{j\pi 0k} + (A-B)e^{j\pi 1k} \right] = \frac{1}{2} \left[(A+B) + (A-B)e^{j\pi k} \right],$$

откуда:

$$x_0 = \frac{1}{2} [A+B + A-B] = \frac{1}{2} \cdot 2A = A;$$

$$x_1 = \frac{1}{2} [A+B - A+B] = \frac{1}{2} \cdot 2B = B,$$

т.е. полностью совпадают с заданными в постановке задачи.

Задание. Рассмотрите частные случаи задачи: а) $A=B$; б) $B=-A$, постройте ДС и их спектры.

Пример 1.4. Дискретный сигнал представлен 4-мя отсчётами: $x(n) = \{+1; +1; 0; 0\}$. Определите спектр ДС, используя ДПФ, постройте АЧХ и ФЧХ спектра.

Решение. Так как количество отсчётов 4, то $N=4$, а сигнал можно записать

$$x(n) = \delta(0) + \delta(1) + 0 \cdot \delta(2) + 0 \cdot \delta(3) = \delta(0) + \delta(1),$$

тогда комплексные амплитуды согласно (1.1) определяем в общем виде из формулы:

$$C_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4} n \cdot k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x_k \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} n \cdot k};$$

$$C_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x_k = \frac{1}{4} (x_0 + x_1 + x_2 + x_3);$$

$$C_1 = \frac{1}{4} \left[x_0 + x_1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 1} + x_2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 2} + x_3 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 3} \right];$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left[x_0 + x_1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 2} + x_2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 4} + x_3 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 6} \right];$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \left[x_0 + x_1 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 3} + x_2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 6} + x_3 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot 9} \right];$$

Для нашего случая после подстановки имеем:

$$C_0 = \frac{1}{4} (1 + 1) = 1/2;$$

$$C_1 = \frac{1}{4} [1 - 0 - j(1 - 0)] = \frac{1}{4} (1 - j) = 0,353e^{-j \frac{\pi}{4}};$$

$$C_2 = \frac{1}{4} [(1 - 1) + (0 - 0)] = 0;$$

$$C_{-3} = \frac{1}{4} [(1 - 0) + j(1 - 0)] = \frac{1}{4} (1 + j) = 0,353e^{j\pi/4}.$$

Графики ДС (а) и АЧХ (б) и ФЧХ (в) спектра приведены на рис. 1.3.

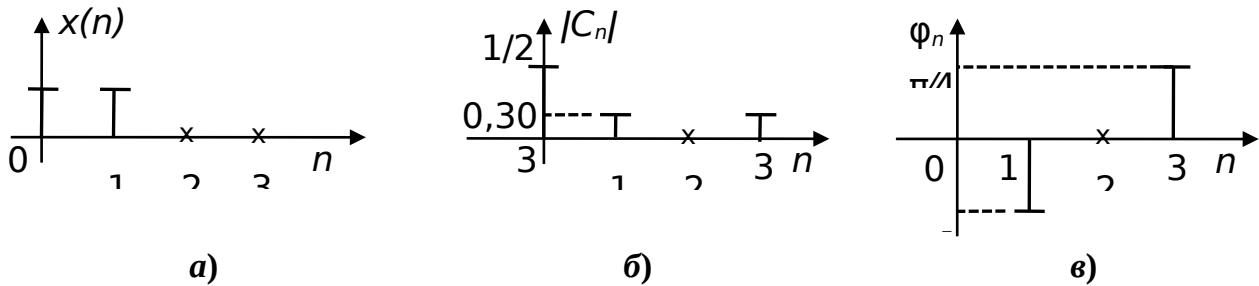


Рис. 1.3

ОДПФ в общем виде:

$$x_k = \sum_{n=0}^3 \frac{j^{2\pi n \cdot k}}{4} = \sum_{n=0}^3 \frac{j^{-n \cdot k}}{2};$$

откуда

$$X = (C_0 + C_1 + C_2 + C_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (1 - j) + 0 + \frac{1}{4} (1 - j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$$X_1 = (C_0 + C_1 e^{j\pi} + C_2 e^{j2\pi} + C_3 e^{j3\pi}) = (C_0 + jC_1 - C_2 - jC_3) = \frac{1}{2} + j \frac{1}{4} (1 - j) + 0 - j \frac{1}{4} (1 - j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-j^2) = 1;$$

$$X_2 = (C_0 + C_1 e^{j\pi} + C_2 e^{j2\pi} + C_3 e^{j3\pi}) = (C_0 - C_1 + C_2 - C_3) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{4} (1 - j) + 0 - \frac{1}{4} (1 - j) = 0 + j0 = 0;$$

$$X_3 = (C_0 + C_1 e^{j\pi} + C_2 e^{j2\pi} + C_3 e^{j3\pi}) = (C_0 - jC_1 - C_2 + jC_3) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{j}{4}(1-j) - 0 + \frac{1}{4}(1+j) = 0 \quad j0 = 0$$

Задание. Определите спектры дискретных последовательностей, используя ДПФ, а по спектру восстановите исходные сигналы:

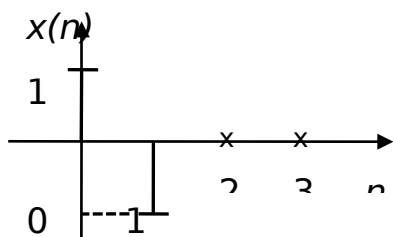
а) $x(n) = \{1; -1; 0; 0\}$;

б) $x(n) = \{0; 1/2; 1; 1/2; 0\}$;

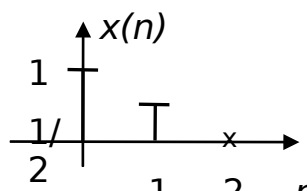
в) $x(n) = \{1; 1/2; 0\}$;

г) $x(n) = \{1; 1/2; 0; 0\}$.

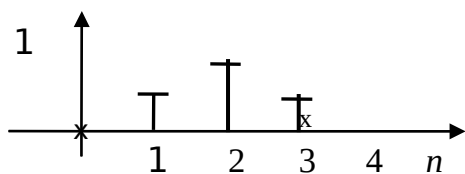
Графики ДС приведены на рис.1.4.



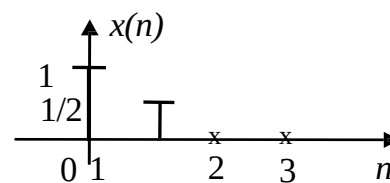
а)



б)



в)



г)

Рис. 1.4

1.3. Задание для самостоятельной работы

Выполните задания и ознакомьтесь с примерами и задачами [1, тема 15: задачи с 15.1 по 15.16].

Практическая работа

Расчет и построение блочных линейных кодов

Пропускная способность систем связи

В общем виде структура передачи-приёма цифровой информации по радиоканалу выглядит следующим образом [1].



Рис. 1. Структура передачи-приёма сигналов

Передатчик принимает последовательность бит (0 или 1) и создаёт физический сигнал или радиоволну (т.е. изменяющееся во времени напряжение), которая переносится по радиоканалу [1].

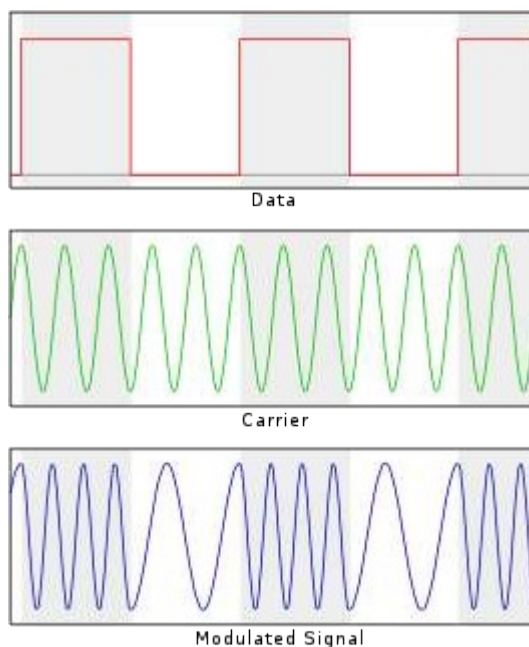


Рис. 2. Формирование радиоволны из бит данных

Задание:

Что такое биты?

- Бит – это основная единица информации, используемая в современных компьютерах и системах связи.
- Бит – это переменная, которая может принимать только два возможных значения или «состояния», обычно обозначаемых 0 или 1.
- Интуитивно этот бит можно рассматривать как ответ на вопрос «да / нет».
- Более сложная информация может быть отправлена последовательностями бит.

Представление битов

Физически биты могут быть представлены как два различных состояния физической переменной [1].

Примеры:

- напряжение (1 = высокое / 0 = низкое)
- текущий (1 = положительный / 0 = отрицательный)
- свет (1 = включен / 0 = выключен)



Рис. 3. Представление бит как сигналов

Передатчик отправляет сигнал, представляющий последовательность битов, приемнику по каналу [1].

Примеры:

- Форма волны напряжения или тока может передаваться по проводу.
- Световой сигнал может быть отправлен по оптоволоконному каналу

(Интернет) или по радио.

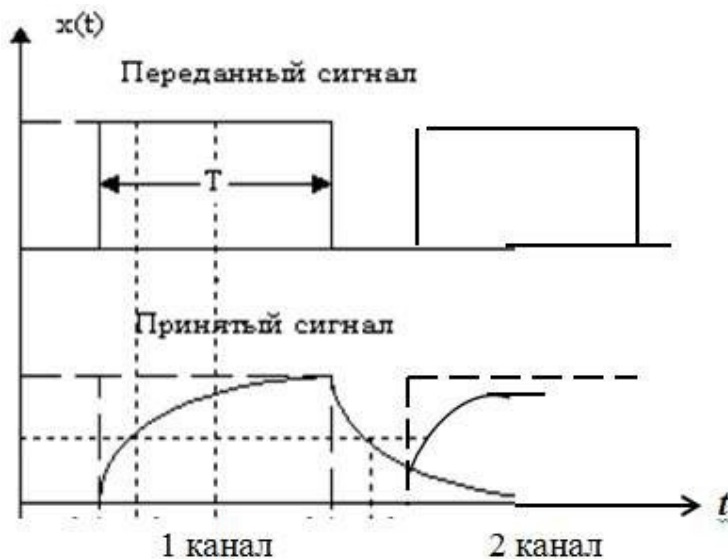


Рис. 4. Искажения сигнала в канале связи

Вопросы. Основы коммуникационных систем

Рассмотрим передачу двоичной последовательности, например «10010110». Для увеличения скорости передачи данных битовое время должно быть _____?

- Короче
- Длиннее

Какова основная роль передатчика в системе связи?

- Чтобы преобразовать информацию в физическую форму волны
- Для восстановления информации из физического сигнала
- Обеспечить среду, по которой распространяется физическая форма

волны

Кодирование информации битами

В таблице ASCII ниже приведены коды ASCII для общих буквенно-цифровых символов и символов, перечисленных от MSB до LSB. Какая битовая последовательность кодирует сообщение «Hi»? Предположим, что мы передаем коды каждого символа последовательно, начиная с LSB.

0	0011 0000	O	0100 1111	m	0110 1101
1	0011 0001	P	0101 0000	n	0110 1110
2	0011 0010	Q	0101 0001	o	0110 1111
3	0011 0011	R	0101 0010	p	0111 0000
4	0011 0100	S	0101 0011	q	0111 0001
5	0011 0101	T	0101 0100	r	0111 0010
6	0011 0110	U	0101 0101	s	0111 0011
7	0011 0111	V	0101 0110	t	0111 0100
8	0011 1000	W	0101 0111	u	0111 0101
9	0011 1001	X	0101 1000	v	0111 0110
A	0100 0001	Y	0101 1001	w	0111 0111
B	0100 0010	Z	0101 1010	x	0111 1000
C	0100 0011	a	0110 0001	y	0111 1001
D	0100 0100	b	0110 0010	z	0111 1010
E	0100 0101	c	0110 0011	.	0010 1110
F	0100 0110	d	0110 0100	,	0010 0111
G	0100 0111	e	0110 0101	:	0011 1010
H	0100 1000	f	0110 0110	;	0011 1011
I	0100 1001	g	0110 0111	?	0011 1111
J	0100 1010	h	0110 1000	!	0010 0001
K	0100 1011	i	0110 1001	'	0010 1100
L	0100 1100	j	0110 1010	"	0010 0010
M	0100 1101	k	0110 1011	(0010 1000
N	0100 1110	l	0110 1100)	0010 1001
			space		0010 0000

Введите битовую последовательность как последовательность единиц и нулей без пробелов между ними, например 1010

Ответ: 0001001010010110

Каково десятичное значение битовой последовательности «1000»? Предположим, что MSB указан первым.

Ответ: 8

Непрерывные и дискретные временные формы сигналов Представление битовых последовательностей в виде сигналов

Последовательность битов можно закодировать, изменяя значение физической переменной с течением времени.

- Каждый бит кодируется путем сохранения постоянного состояния в течение определенного периода времени, известное как бит времени.

- Чем короче битовое время, тем быстрее мы можем передавать информацию (биты)



Рис. 5. Непрерывные и дискретные сигналы времени

Сигнал непрерывного времени (СТ) имеет известное значение для всех точек временного интервала.

Сигнал дискретного времени (DT) имеет известное значение только в дискретном (прерывистом) наборе моментов времени.

Выборка: непрерывный сигнал в дискретный

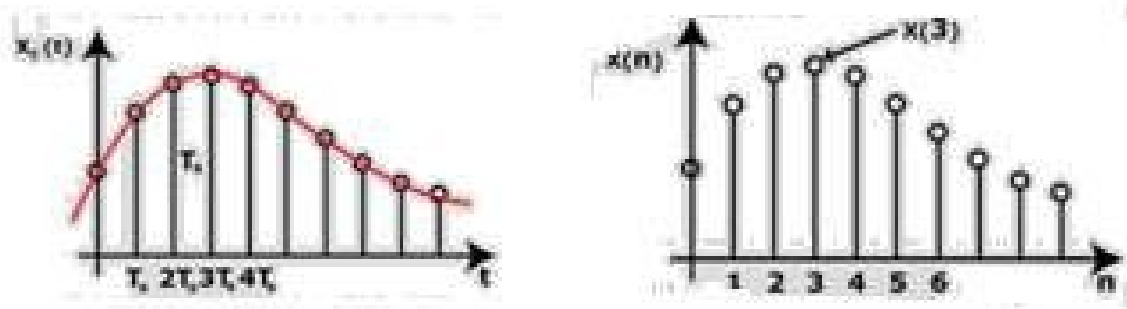
- Получите дискретную временную форму сигнала путем дискретизации непрерывного временного сигнала $x_c(t)$ через равные промежутки времени.

T_s = период выборки.

- Проиндексируйте каждую выборку по целочисленному номеру выборки n .

- n -й образец соответствует форма волны в момент времени $t = nT_s$

Пример: $x(n) = x_c(nT_s)$



От дискретного к непрерывному времени

Учитывая выборку $x(n)$, мы можем получить непрерывную временную форму волны $x_h(t)$, удерживая форму волны в $x(n)$ между временами nT_s и $(n+1)T_s$

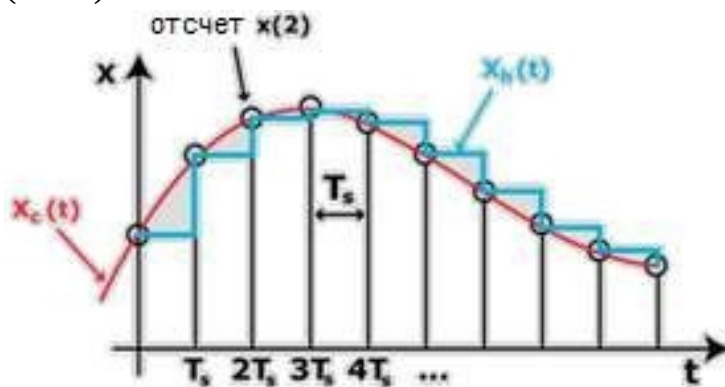


Рис. 6. Непрерывные и дискретные сигналы времени Период

выборки в зависимости от частоты

T_s = период выборки (временной интервал между выборками) Типичная единица измерения: секунды (с, с)

F_s = частота или частота дискретизации (количество выборок за фиксированный период времени)

Типичная единица измерения: Герц (Гц, выборок в секунду) F_s

$$\frac{1}{T_s}$$

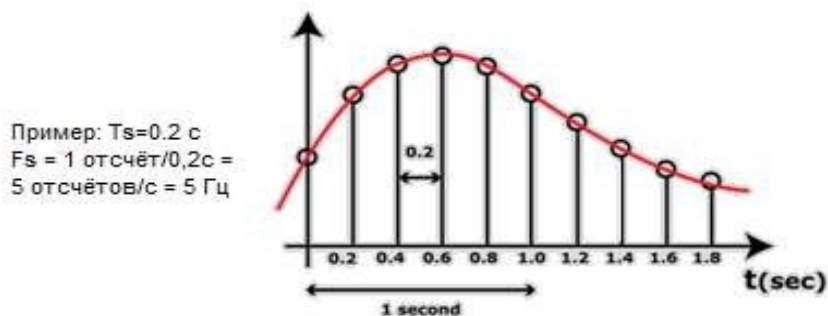


Рис. 7. Процесс дискретизации

Количество выборок

Выборка сигнала длиной T_w с периодом выборки T_s приводит к N отсчётам, где

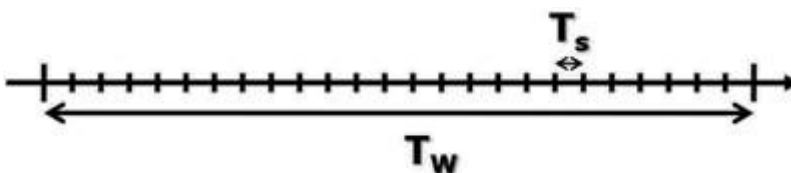
$$N = \frac{T_w}{T_s} = T_w \cdot F_s$$


Рис. 8. Выборка сигнала

Компромисс: более высокая частота дискретизации

- Хорошо: меньше информации теряется благодаря меньшему времени между выборками.
- Плохо: требуется больше места для хранения, поскольку за заданный промежуток времени требуется больше образцов.

Предположим, мы дискретизируем сигнал на частоте F_s . Если мы соберем 1500 отсчётов или семплов за 5 секунд, чему равно F в Гц?

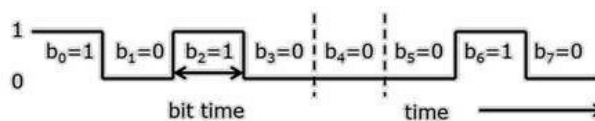
Ответ 300

Компакт-диски записывают два канала (левый и правый) музыки с частотой дискретизации $F_s = 44,1$ кГц. Если каждый отсчёт или сэмпл закодирован 16 битами, а один байт равен 8 битам, сколько байтов требуется для хранения одной минуты музыки?

Ответ 10584000

Битовые сигналы дискретного времени

Непрерывный во времени



Дискретный во времени

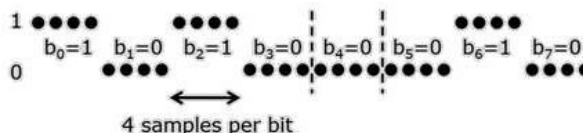


Рис. 9. Битовые сигналы

Битовое время измеряет время, необходимое для отправки одного бита.

$$\text{Длит. бита} = \text{SPB} \cdot T_s = \frac{\text{SPB}}{F_s}$$

Битрейт измеряет количество бит, которое мы можем отправить за заданную

единицу времени.

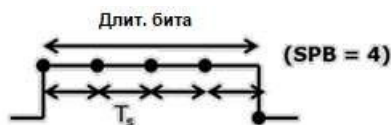
75

75

$$\text{Битрейт} = \frac{1}{\text{Длит. бита}} = \frac{1}{\text{SPB} \cdot T_s} = \frac{F_s}{\text{SPB}}$$

Обычно мы хотим:

- битрейт должен быть большим
- время бит быть маленьким



Пример расчета скорости передачи данных

Частота дискретизации

$$F_s = 1 \text{ МГц} = 1 \text{ Мега Герц} = 1,000,000 \text{ отсчетов / с} = 10^6 \text{ отсчетов / с}$$

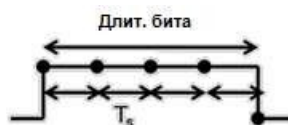
Если используется 4 отсчета за выборку (SPB = 4), тогда

$$T_s = (F_s)^{-1} = 10^{-6} \text{ с} = 1 \text{ мкс микросекунд}$$

$$\text{Длительность бита} = \text{SPB} T_s = 4 \text{ мкс}$$

Битовая скорость

$$\begin{aligned} &= \frac{F_s}{\text{SPB}} \\ &= \frac{1,000,000 \text{ Hz}}{4} = 250 \text{ kHz} \end{aligned}$$



Рассмотрим систему, которая использует 8-битные коды ASCII для кодирования букв. Сколько времени потребуется, чтобы передать последовательность битов с кодировкой «Hello» (без кавычек), если мы используем время передачи данных в 5 отсчетов на бит и передаем отсчеты с частотой 1 МГц?

Ответ: 200.

Рассмотрим систему, которая использует 8-битные коды ASCII для кодирования букв. Сколько времени потребуется для передачи битовой последовательности с кодировкой «Good Morning» (без кавычек), если мы используем битовое время 5 отсчетов на бит и передаем отсчеты с частотой 1 МГц?

Рассмотрим систему связи, в которой передатчик использует 0 В для представления бита «0» и 1 В для представления бита «1». Пример формы передаваемого сигнала приведен на следующем рисунке.

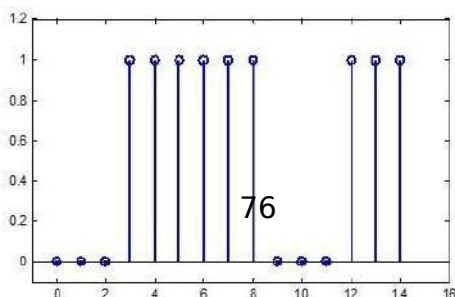


Рис. 10. Пример передаваемого сигнала

Предположим, что первый бит начинается с отсчета 0, каково максимально возможное время передачи (в SPB), используемое при передаче?

Ответ: 3.

Методы защиты от ошибок защиты от ошибок - использование блочных кодов.

Степень кодирования и избыточность

При использовании блочных кодов исходные данные делятся на блоки из k бит, которые иногда называют информационными битами, или битами сообщения; каждый блок может представлять любое из 2^k отдельных сообщений. В процессе кодирования каждый k -битовый блок данных преобразуется в больший блок из n бит, который называется кодовым битом, или канальным символом. К каждому блоку данных кодирующее устройство прибавляет $(n - k)$ бит, которые называются *избыточными битами* (redundant bits), *битами четности* (parity bits), или *контрольными битами* (check bits); новой информации они не несут. Для обозначения описанного кода используется запись (n, k) . Отношение числа избыточных бит к числу информационных бит, $(n - k)/k$, называется *избыточностью* (redundancy) кода; отношение числа бит данных к общему числу бит, k/n , именуется *степенью кодирования* (code rate). Под степенью кодирования подразумевается доля кода, которая приходится на полезную информацию. Например, в коде со степенью $1/2$, каждый кодовый бит несет $1/2$ бит информации [9].

Линейные блочные коды

Линейные блочные коды— это класс кодов с контролем четности, которые можно описать парой чисел (n, k) (объяснение этой формы записи приводилось выше). В процессе кодирования блок из k символов сообщения (вектор сообщения) преобразуется в больший блок из n символов кодового слова (кодовый вектор), образованного с использованием элементов данного алфавита. Если алфавит состоит только из двух элементов (0 и 1), код является двоичным и включает двоичные разряды (биты). Если не будет оговорено противное, наше последующее обсуждение линейных блочных кодов будет подразумевать именно двоичные коды [9].

Одним из важнейших параметров кода является кодовое расстояние. *Кодовым расстоянием* или просто *расстоянием* кода V называется минимальное расстояние между двумя различными кодовыми словами, т. е. [9]

$d_V = \min d(x, y), x \neq y \text{ и } x, y \in V.$

Для двоичного кода V под расстоянием понимается расстояние Хэмминга.

Теорема 1.1. Код V исправляет все комбинации из t или менее ошибок, если и только если кодовое расстояние не меньше, чем $2t + 1$, т. е. $d_V \geq 2t + 1$.

Доказательство теоремы основано на построении сфер с радиусом t вокруг каждого кодового слова. Для того чтобы каждая ошибка кратности t была исправлена, слово с такой ошибкой должно содержаться внутри сферы, описанной только вокруг одного кодового слова. Таким образом, расстояние между центрами двух сфер, т. е. различными кодовыми словами должно быть не меньше $2t + 1$. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 20 [9].

Теорема 1.2. Код V обнаруживает все комбинации из t или менее ошибок, если и только если кодовое расстояние не меньше, чем $t + 1$, т. е. $d_V \geq t + 1$.

Для того, чтобы каждая ошибка кратности t была обнаружена, слово с такой ошибкой не должно быть кодовым, т. е. расстояние между любыми различными кодовыми словами должно быть больше t . [9]

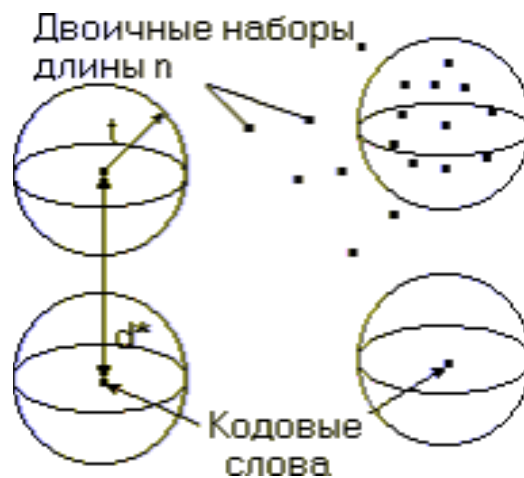


Рис 32. Сферы, центрами которых являются кодовые слова.

Например, код с расстоянием 3 исправляет все одиночные ошибки и обнаруживает все двукратные ошибки. Код с расстоянием 4 обнаруживает все ошибки кратности 3 и менее; однако такой код по-прежнему исправляет только одну ошибку [9].

Пример. В качестве примера попробуем построить код с кодовым словом длины 5, который имеет 3 информационных символа и исправляет одну ошибку. Так как информационных символов три, то различных кодовых

слов должно быть $2^3 = 8$. Согласно теореме 1.1 расстояние между двумя различными кодовыми словами должно быть не меньше $2 \times 1 + 1 = 3$. Включим в код V слово 00000. Тогда все остальные кодовые слова имеют вес не менее 3. После включения в код V любого слова веса 3, ни одно слова веса 3 в код добавлено быть не может, так как расстояние между любыми двумя словами веса 3 равно 2. По той же причине слово 11111 веса 5 также не принадлежит коду V . Остаются 5 слов веса 4, которых недостаточно, чтобы иметь 8 кодовых слов [9].

Задание .

1. Определить способность исправлять и обнаруживать ошибки, если кодовое расстояние составляет 5.
2. Определить способность исправлять и обнаруживать ошибки, если кодовое расстояние составляет 7.
3. Определить способность исправлять и обнаруживать ошибки, если кодовое расстояние составляет 3

Список литературы

1. Пешков, И. В. Адаптивные алгоритмы пространственной обработки сигналов, эффективные при случайных дестабилизирующих воздействиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.03 / И. В. Пешков. – Воронеж, 2012. – 182 с.
2. Боев, Н.М. Системы связи. Подвижные системы связи: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / сост. Н. М. Боев. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. – URL: <http://diss.seluk.ru/m-radiotehnika/1087216-1-sistemi-svyazi-podvizhnie-sistemi-svyazi-lekcii-uchebno-metodicheskoe-posobie-elektronnoe-izdanie-krasnoyarsk-sfu-2013-udk-621396930.php>
3. Сжатие данных. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Data_compression.
4. Таненбаум, Э. Компьютерные сети / Э. Таненбаум, Д. Уэзеролл; [пер. с англ. А. Гребеньков]. – 5-е изд. – М. [и др.] : Питер, 2014. – 955 с.
5. Кодовое разделение пользователей. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Code_division_multiple_access.
6. Ташатов Н. Н. Использование избыточности для защиты от ошибок
7. // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. наук. – 2007. – №5. – С.63-68.
8. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. 2-е изд., испр. ; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
9. Коды, исправляющие ошибки. – URL: https://ido.tsu.ru/iop_res1/kodi/index.php-mod=article&id=169.htm.

Практическая работа Циклические коды

Теоретический материал

Циклические коды являются подмножеством линейных кодов, однако, они имеют некоторые специфические свойствами, позволяющие упрощать процессы кодирования и декодирования. При этом, корректирующая способность циклических кодов довольно высока. Одним из основных специфических свойств таких кодов является то, что все строки образующей матрицы могут быть образованы циклическим сдвигом одной комбинации, называемой образующей для данного кода. Сдвиг реализуется справа налево, причем крайний левый разряд каждый раз переносится в конец комбинации. Запишем, например, совокупность кодовых комбинаций, образующихся циклическим сдвигом комбинации 001011:

		0	0	1	0	1	1
		0	1	0	1	1	0
$G =$		1	0	1	1	0	0
		0	1	1	0	0	1
		1	1	0	0	1	0
		1	0	0	1	0	1

При описании циклических кодов n -разрядные кодовые комбинации представляются в виде многочленов фиктивной переменной x . Поэтому циклические коды часто называют полиномиальными кодами. Тогда циклический сдвиг строки матрицы с единицей в старшем разряде (слева) равносильно умножению соответствующего строке многочлена. Т.е., например, результатом умножения первой строки матрицы (001011), соответствующую многочлену $G_0(X) = x^3 + x + 1$, на x , будет вторая строка матрицы (010110). Нетрудно убедиться, что кодовая комбинация, образующаяся при суммировании по модулю два этих двух комбинаций, также будет соответствовать результату умножения многочлена $x^3 + x + 1$ на многочлен $x + 1$. Действительно,

$$001011 \oplus 010110 = 011101 = x^4 + x^3 + x^2 + 1,$$

$$(x^3 + x + 1)(x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 011101.$$

Отсюда ясно, что любая разрешенная⁸¹ кодовая комбинация циклического кода может быть образована в результате умножения образующего полинома на некоторый другой полином. Т.е., при соответствующем выборе образующего полинома, любой многочлен циклического кода будет делиться на него без остатка.

Ни один многочлен, соответствующий запрещенной кодовой комбинации, на образующий многочлен без остатка не делится. Это свойство позволяет обнаружить ошибку. По виду остатка можно определить вектор ошибки.

Умножение и деление многочленов реализуется на регистрах сдвига с обратными связями и сумматорах по модулю 2.

В основе циклического кодирования лежит использование неприводимого многочлена $P(X)$, который применительно к циклическим кодам называется образующим, генераторным или производящим полиномом.

Полином в циклическом кодировании называется неприводимым, если он делится без остатка только на себя или на единицу. Неприводимые полиномы приведены в таблице 1.

Таблица 1. Неприводимые полиномы и их эквиваленты

Сте- пень	Многочлен	Двоичная последова- тельность	Сте- пень	Многочлен	Двоичная по- следова- тельность
2	x^2+x+1	111	x^7+x^3+1	10001001	
3	x^3+x+1	1011	$x^7+x^3+x^2+x+1$	10001111	
	x^3+x^2+1	1101	$x^7+x^4+x^3+x^2+1$	10011101	
	x^4+x+1	10011		$x^7+x^5+x^2+x+1$	10100111
4	x^4+x^3+1	11001		$x^7+x^5+x^3+x+1$	10101011
	$x^4+x^3+x^2+x+1$	11111	8	$x^8+x^6+x^3+x+1$	11001011
	x^5+x^2+1 x^5+x^3+1	100101 101001		$x^7+x^6+x^4+x+1$	11010011
				$x^8+x^4+x^3+x+1$	100011011
5	$x^5+x^3+x^2+x+1$	101111		$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	100011101
	$x^5+x^4+x^2+x+1$	110111		$x^8+x^5+x^3+x+1$	100101011
	$x^5+x^4+x^3+x+1$	111011		$x^8+x^5+x^3+x^2+1$	100101101
	$x^5+x^4+x^3+x^2+1$	111101		$x^8+x^6+x^5+x^2+1$	101100101

	x^6+x+1	1000011		$x^8+x^7+x^3+x+1$	110001011
	x^6+x^3+1	1001001		$x^8+x^7+x^5+x^3+1$	110101001
	$x^6+x^4+x^2+x+1$	1010111		x^9+x+1	1000000011
	$x^6+x^4+x^3+x+1$	1011011		x^9+x^4+1	1000010001
6	x^6+x^5+1	1100001	9	$x^9+x^4+x^2+x+1$	1000010111
	$x^6+x^5+x^2+x+1$	1100111		$x^9+x^4+x^3+x+1$	1000011011
	$x^6+x^5+x^3+x^2+1$	1101101		$x^9+x^5+x^4+x+1$	1000110011
	$x^6+x^5+x^4+x+1$	1110011		$x^9+x^6+x^5+x^2+1$	1001100101
	$x^6+x^5+x^4+x^2+1$	1110101	10	$x^{10}+x^3+1$	10000001001

Один из методов построения циклического кода. Существует несколько способов кодирования. Наиболее просто комбинации циклического кода образуются умножением многочлена $G(X)$, соответствующего комбинации безызбыточного кода (информационным разрядам), на образующий полином кода $P(X)$. Такой способ легко реализуется, однако он имеет недостаток - образующаяся в результате умножения комбинация кода не содержит информационных разрядов в явном виде. После исправления ошибок такие комбинации для выделения информационных разрядов приходится делить на образующий полином. Ситуацию можно значительно упростить, если контрольные разряды переписать в конце кода, т.е. после информационных. Для этой цели прибегают к следующему приему.

Умножаем кодовую комбинацию $G(X)$, которую мы хотим закодировать, на одночлен X^m , где m – значение максимальной степени образующего полинома $P(X)$.

Далее делим это произведение $G(X)*X^m$ на образующий полином $P(X)$:

$$\frac{G(X)*X^m}{P(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{P(X)}$$

где $Q(X)$ – частное от деления; $R(X)$ – остаток.

Умножая выражение (1) на $P(X)$ и перенося $R(X)$ в другую часть равенства имеем:

$$F(X) = Q(X)*P(X) = G(X)*X^m + R(X)$$

Таким образом, в соответствии с приведенным равенством, циклический код можно образовать умножением заданной комбинации $G(X)$ на одночлен X^m , имеющий ту же степень, что и образующий полином $P(X)$, с добавлением к

этому произведению остатка $R(X)$, образованного после деления произведения $G(X) \cdot X^m$ на генераторный полином $P(X)$.

Пример 2.6. Закодировать кодовую комбинацию $G(X) = 1111 = x^3 + x^2 + x + 1$ циклическим кодом.

Решение. Не останавливаясь на выборе генераторного полинома $P(X)$, о чем будет сказано подробно далее, возьмем из таблицы полином

$P(X) = x^3 + x + 1 = 1011$. Умножая $G(X) \cdot X^m$, получаем

$$G(X) \cdot X^n = (x^3 + x^2 + x + 1)x^3 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 \rightarrow 1111000.$$

Разделив на $G(X) \cdot X^m$ на $P(X)$, получим

$$\frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^3}{x^3 + x + 1} = (x^3 + x^2 + 1) + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + 1}$$

или в двоичном эквиваленте

$$1111000/1011 = 1101 + 111/1011.$$

Таким образом, в результате деления есть частное $Q(X) = 1101$ той же степени, что и $G(X) = 1111$, и остаток $R(X) = 111$. В итоге комбинация двоичного кода, закодированная циклическим кодом, согласно (2.29) примет вид

$$F(X) = 1111000 \oplus 111 = 1111111.$$

Задание 1. Закодировать циклическим кодом любую последовательность, имеющую вес равный 2. Образующий полином задан в виде двоичной комбинации 1011.

Задание 2. Закодировать комбинацию 1001. $P(x) = x^3 + x^2 + 1$

Циклические коды, обнаруживающие одиночную ошибку ($d = 2$). Код, образованный генераторным полиномом $P(X) = x + 1$, обнаруживает любое нечетное количество ошибок.

Закодируем сообщение $G(X) = 1101$ с помощью многочлена $P(X) = 11$. Поступая по методике, рассмотренной выше, будет

$$F(X) = G(X) \cdot X^m + R(X) = 11010 + 1 = 11011,$$

т.е. на первых четырех позициях находятся разряды исходной комбинации $G(X)$, а на пятой - контрольный разряд.

Сообщение 1101 является одной из 16^{84} комбинаций четырехразрядного кода. Если требуется передать все эти сообщения в закодированном виде, то каждое из них следует кодировать так же, как и комбинацию $G(X) = 1101$. Однако проводить 15 расчетов (т.е. 2^m расчетов) нет необходимости. Это можно реализовать проще, путем составления образующей матрицы. Образующая матрица составляется из единичной транспонированной и добавочной матрицы, составленной из остатков от деления единицы с нулями на образующий полином $P(X)$, выраженный в двоичном эквиваленте. Образующая матрица в данном примере имеет вид:

	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	1
	0	1	0	0	1
	1	0	0	0	1

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right)$$

Единичная транспонированная матрица
 Матрица дополнений

Четыре кодовые комбинации, из которых состоит образующая матрица, являются первыми кодовыми комбинациями циклического кода. Пятая комбинация нулевая, а так как в четырехразрядном коде всего $N = 2^4 = 16$ комбинаций, то остальные 11 ненулевых комбинаций находят суммированием по модулю 2 всевозможных комбинаций строк матрицы M :

5. 0000	9. $a_2 \oplus a_3 = 01100$	13. $a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 11101,$
6. $a_1 \oplus a_2 = 00110$	10. $a_2 \oplus a_4 = 10100$	14. $a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 11011,$
7. $a_1 \oplus a_3 = 01010$	11. $a_3 \oplus a_4 = 11000$	15. $a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 10111,$
8. $a_1 \oplus a_4 = 10010$	12. $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 01111$	16. $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 11110.$

Циклический код с $d = 3$. Эти коды ⁸⁵ могут обнаруживать одиночные и двойные ошибки или обнаруживать и исправлять одиночные ошибки. Принципы построения кода.

1. Расчет количества контрольных разрядов производят, как же кода СГК, с исправлением одиночной ошибки. Если известен образующий полином, то количество контрольных разрядов равно старшей степени этого полинома.
2. Выбор образующего полинома $P(X)$. Степень образующего полинома не может быть меньше количества контрольных разрядов m . Если в таблице имеется ряд многочленов с данной степенью, то из них следует выбирать самый короткий. Однако, количество ненулевых членов образующего полинома $P(X)$ не может быть меньше кодового расстояния d ;

3) Нахождение элементов добавочной матрицы. Ее составляют из остатков, образованных от деления единицы с нулями на образующий полином $P(X)$ в двоичном виде.

При этом необходимо соблюдать следующее:

- а) количество остатков равно количеству информационных разрядов k ;
 - б) пригодны лишь остатки с весом w , не меньшим количества обнаруживаемых ошибок, т.е. в данном примере не меньшим $2(w \geq 2)$;
 - в) количество нулей, приписываемых к единице при делении ее на многочлен $P(X)$, определяется в соответствии с пунктами а и б;
 - г) количество элементов добавочной матрицы равно количеству контрольных разрядов m ;
4. Составление образующей матрицы. Берут транспонированную единичную матрицу размерностью $k \times k$ и справа приписывают к ней добавочную матрицу размерностью $k \times m$;
 5. Нахождение всех комбинаций циклического кода данного сомножества. Достигается суммированием по модулю 2 всевозможных сочетаний строк образующей матрицы, как показано при рассмотрении циклического кода с $d = 2$;
 6. При индивидуальном кодировании любой из кодовых комбинаций, принадлежащей к сомножеству k разрядных комбинаций, поступают по описанной выше методике.

Пример:

Образовать циклический код, позволяющий обнаруживать двукратные ошибки и исправлять одиночные ошибки из всех комбинаций двоичного кода на все сочетания с количеством информационных разрядов равным 5.

Решение

По уравнению находим количество контрольных разрядов:

$$m = E\log((k + 1) + E\log(k + 1)) = E \log((5 + 1) + E \log(5 + 1)) = 4 .$$

Из таблицы выбираем образующий полином $P(X) = x^4 + x + 1$.

Разрядность исходного кода (информационного полинома $G(x)$) равна 5. Количество контрольных разрядов мы рассчитали - это 4. В итоге разрядность комбинации циклического кода равна 9, то есть имеем код (9, 5).

Для того, чтобы составить все ненулевые разрешенных комбинаций составляют порождающую матрицу M называемую также образующей или производящей матрицей, которая состоит из единичной I матрицы размерности k, k (для кода (9,5) – это 5,5) и добавочной матрицы D проверочных элементов размерности k, m (для кода (9,5) – это 5 , 4).

Единичная матрица имеет вид:

$$I_{5,5} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00001 \end{pmatrix}$$

Для нахождения строк добавочной матрицы реализуется деление единицы с нолями на порождающий многочлен в двоичной форме. Образованные на каждом шаге остатки от деления являются строками проверочной матрицы D . Пример расчета проверочных элементов для кода (9,5) и порождающего многочлена $P(x)=10011$ имеет вид:

$$\begin{array}{r} 10000000 \quad 10011 \\ 10011 \quad 10011 \\ \oplus \\ \hline 00110 \\ \oplus 00000 \\ \hline 01100 \\ \oplus 00000 \\ \hline 11000 \\ \oplus 10011 \\ \hline 10110 \\ \oplus 10011 \end{array}$$

Порождающая матрица для рассматриваемого примера будет иметь вид:

$M =$	0	0	0	0	1	0	0	1	1	
	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
	0	0	1	0	0	1	1	0	0	
	0	1	0	0	0	1	0	1	1	
	1	0	0	0	0	0	1	0	1	

Каждая строка этой матрицы является разрешенной кодовой комбинацией кода. Для составления остальных разрешенных кодовых комбинаций необходимо каждую строку матрицы образующей матрицы суммировать по модулю два с последующей строкой и т.д., как в предыдущем примере. Например, суммирование первой строки со второй даст разрешенную комбинацию вида: 110001110, суммирование по модулю два всех пяти строк также даст разрешенную комбинацию вида: 111110111.

Пример. То же самое с x^4+x^3+1 .

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1						1	1	1	1	0
	1	0	0	1	0									
	1	1	0	0	1									
		1	0	1	1	0								
		1	1	0	0	1								
			1	1	1	1	0							
			1	1	0	0	1							
				0	1	1	1	0						
				0	0	0	0	0						
					1	1	1	0						

88

Схема циклического кода Кратко рассмотрим построение структурной схемы циклического кодера. В дальнейшем это будет необходимо для понимания декодирования ЦК. Определим принципы построения кодирующего устройства.

1. Кодирующее устройство строится в соответствии с видом образующего полинома и в основе своей представляет собой регистр сдвига с обратными связями через сумматоры по модулю два.
2. Количество ячеек памяти в регистре равно степени образующего полинома.
3. Количество сумматоров по модулю два равно весу образующего полинома минус единица.
4. Сумматоры по модулю два ставятся перед ячейками памяти, которые соответствуют ненулевым членам образующего полинома, исключая его старшую степень.

Структурная схема кодирующего устройства для кода (9,5) и образующего полинома $P(x) = x^4 + x + 1$, построенная в соответствии с вышесказанным, приведена на рисунке.

В представленной схеме кодера имеется 4 триггера: m_1 , m_2 , m_3 и m_4 , в качестве ячеек памяти, 2 сумматора по модулю два: S_1 и S_2 , два ключа, представленных в виде схем И1 и И2, и элемент ИЛИ. Схема тактируемая.

Схема кодера работает следующим образом.

Безизбыточный код поступает на сумматор S_2 , после чего происходит деление на образующий полином, что реализуется с помощью обратных связей через схему И1. Пока поступает информационная кодовая комбинация $G(x)$, то есть в нашем примере - с 1го по 5й такты, схема И1 открыта, а схема И2 закрыта вследствие чего информационные элементы поступают на выход кодера. После k тактов, где k - количество информационных разрядов, ключ И1 размыкается, а ключ И2 замыкается и с регистра сдвига на выход кодера считывается остаток от деления $R(x)$. В последующие такты с 6го по 9й через схему И2 остаток от деления выводится в линию связи. Состояние триггеров на каждом такте работы схемы представлено в таблице.

Подробнее описание работы устройства кодирования приведено в приложении.

Циклические коды с $d=4$.

Циклические коды с $d \geq 5$. Эти коды, разработанные Боузом, Чоудхури и Хоквинхемом (сокращенно код БЧХ), позволяют обнаруживать и исправлять любое число ошибок. Заданными при кодировании является число исправляе-

89
мых ошибок s и длина слова n . Число информационных символов k и контрольных символов r , а также состав контрольных символов подлежат определению.

Декодирование циклических кодов. Идея обнаружения ошибок в принятом циклическом коде заключается в том, что при отсутствии ошибок закодированная комбинация $F(X)$ делится на образующий многочлен $P(X)$ без остатка. При этом контрольные разряды t отбрасываются, а информационные разряды k принимаются. Если происходит искажение принятой комбинации, то на входе декодера образуется комбинация:

$$F^*(X) = F(X) + E(X),$$

где $E(X)$ - многочлен ошибок.

Разрядность полинома ошибок такая же, как и разрядность комбинации $F(x)$ циклического кода. При этом ненулевые разряды в $E(x)$ указывают на ошибочные элементы в принятой кодовой комбинации. При отсутствии ошибок полином $E(x)$ состоит из одних нулей.

Если же в результате деления полинома $F^*(X)$ на порождающий многочлен $P(x)$ остаток $R'(x)$ отличен от нуля, то это означает что принятая кодовая комбинация содержит ошибки.

Вид ненулевого остатка $R'(x)$, называемого синдромом ошибки $S(x)$, имеет однозначное соответствие с ошибочным разрядом и видом полинома однократной ошибки $E(x)$ для всех кодовых комбинаций циклического кода. Например, для циклического кода (9,5) при заданном образующем полиноме $P(x) = x^4 + x + 1$ остаток $R'(x)$ всегда будет иметь вид $S(x) = 0011$, если ошибка происходит в пятом разряде входной кодовой комбинации, независимо от вида переданной кодовой комбинации $F(x)$.

Принята комбинация кода (7,4) $F(X) = 1101001$, закодированная с помощью циклического кода представленного в виде двоичной комбинации 1011. Если она принята правильно, то деление на $P(X)$ дает остаток, равный нулю. Если же комбинация принята как $F^*(X) = 1101011$, то при делении на $P(X)$ образуется остаток $R(X) = 010$, что свидетельствует об ошибке, и принятая комбинация бракуется.

Кратность обнаруживаемых ошибок в принятой кодовой комбинации циклического кода определяется минимальным кодовым расстоянием d_{\min} этого кода. При этом следует отметить, что код не обнаруживает ошибки, если полином ошибки имеет вид разрешенной кодовой комбинации.

Для исправления однократной ошибки⁹⁰ в принятой кодовой комбинации $F^*(X)$ необходимо определить место ошибки. С этой целью производится деление принятого полинома на порождающий многочлен $P(x)$. Для примера рассмотрим код (9,5). Если на 9-ом такте в декодере будет зафиксирована хотя бы одна единица, то деление происходит до тех пор, пока в делителе не будет зафиксирована так называемая “особая” кодовая комбинация T . Вид этой комбинации зависит только от вида порождающего многочлена $P(x)$ и длины n комбинации циклического кода $F(x)$, причем находится T как остаток от деления x^n на $P(x)$. В нашем примере, для кода (9,5) и порождающего многочлена $P(x)=x^4+x+1$ “особая” кодовая комбинация, всегда имеет вид 1010.

$$\begin{array}{r}
 x^9 \\
 \oplus x^9 + x^5 + x^4 + x + 1 \\
 \hline
 x^4 + x^3 + x \\
 \oplus x^4 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \oplus x^3 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x^2 + x + 1 \\
 \oplus x^2 + x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x + 1 \\
 \oplus x + x + 1 \\
 \hline
 1 \\
 \oplus 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

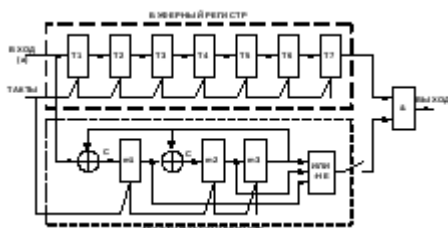
$x^3 + x \Rightarrow 1010$

Номер такта, на котором в делителе возникает “особая” кодовая комбинация, указывает место ошибочного разряда в принятой кодовой комбинации. При считывании этой комбинации из буферного регистра ошибочный разряд исправляется (инвертируется).

Циклический код (9,5) гарантированно исправляет только однократные ошибки. Ошибки более высокой кратности код (9,5) не исправляет.

Рассмотрим пример декодирования циклического кода $P(x)=x^3+x+1$.

Вначале строится структурная схема декодера. Для кода $P(x)=x^3+x+1$ она выглядит следующим образом:



Структурная схема декодера строится по тем же принципам, что и схема кодера. В состав декодера

циклического кода (7,4) входят: буферный регистр на 7 разрядов, декодирующий регистр (регистр-делитель), схема ИЛИ–НЕ, схема И, а также – управляющее устройство, замыкающее ключ К1 после 7-го такта (на схеме устройство не показано). На вход декодирующего регистра поступает кодовая комбинация, которая делится на порождающий полином в декодирующем регистре. По окончании деления, после 7 тактов, в триггерах $m_1 \div m_3$ декодирующего регистра записывается остаток от деления. Если при этом хотя бы один из триггеров $m_1 \div m_3$ находится в единичном состоянии, то это означает, что в принятой кодовой комбинации имеется ошибка. Для обнаружения места ошибки деление происходит далее и на каждом такте разряды с выходов триггеров $m_1 \div m_3$ поступают на вход схемы ИЛИ–НЕ. На выходе этой схемы формируется нулевой разряд, который при замкнутом ключе К1 поступает на второй вход схемы И. На первый вход схемы И поступает кодовая комбинация из буферного регистра. Под действием нулевого разряда с выхода схемы ИЛИ–НЕ схема И запирается и кодовая комбинация не поступает из буферного регистра на выход схемы декодера.

Если все триггеры $m_1 \div m_3$ декодирующего регистра имеют значение «0» после 7-го такта, то дальнейшее деление не происходит. Тогда схема И пропускает на выход декодера безошибочно принятую кодовую комбинацию из буферного регистра, причем потребителю направляются первые четыре разряда, составляющих информационную кодовую комбинацию $G(x)$.

На основании построенной схемы декодера строится таблица состояния триггеров или как ее еще называют таблица декодирования. Слева записывается комбинация, которую требуется проверить $F^*(X)$, она может быть как верной, так и ошибочной, поэтому записываю ее со звездочкой. При этом, $C=m_{3пр}$, $m_1=C+a$, $m_2=C+m_{1пр}$, $m_3=m_{2пр}$ (определяется из схемы декодера) Если при декодировании $m_3=0$, $m_2=0$, $m_1=0$ (старшим считается разряд m_3), то ошибок в принятой комбинации нет. Если при декодировании обнаружен синдром, то происходит дальнейшее декодирование для определения разряда, в котором есть ошибка, путем поиска особой комбинации (посчитать особую комбинацию 001). Номер такта, при котором обнаружена такая комбинация будет разрядом, в котором есть ошибка.

Пример 1.

Дано: $P(x)=x^3+x+1$. На приемник приходит комбинация 1101001.

Задача: проверить, верна ли комбинация, если нет, исправить.

	m_1	m_2	m_3	
a	0	0	0	c

1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1

Ответ: Кодовая комбинация передана без ошибок.

Пример 2.

Дано: $P(x)=x^3+x+1$. На приемник приходит комбинация 1110011.

Задание 4: проверить, верна ли комбинация, если нет, исправить.

a	m₁	m₂	m₃	c
	0	0	0	
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1

Ответ: Ошибка во втором разряде. Верная кодовая комбинация 1010011

Рассмотрим еще один пример декодирования циклических кодов. Он заключается в следующем. Принятую кодовую комбинацию делят на $P(X)$, и

если остаток $R(X)=0$, то комбинация принята без искажений. Наличие остатка свидетельствует о том, что комбинация принята искаженной. Рассмотрим дальнейшую процедуру исправления.

1. Если вес остатка равен или меньше количества исправляемых ошибок, т.е. $w < s$, то принятую комбинацию суммируют по модулю 2 с остатком, в результате чего образуется исправленная комбинация;
2. Если вес остатка больше количества исправляемых ошибок, т.е. $w > s$, то производят циклический сдвиг комбинации на один разряд влево и образованную в результате сдвига комбинацию снова делят на $P(X)$. Если вес остатка, образованного при делении меньше ли равен количеству исправляемых ошибок, то циклически сдвинутую комбинацию суммируют по модулю два с остатком и затем циклически сдвигают ее в обратную сторону, т.е. вправо на один разряд. В результате чего имеем исправленную комбинацию;

3) Если после циклического сдвига на один разряд вес остатка по-прежнему больше количества исправляемых ошибок, производят дальнейшие циклические сдвиги влево. При этом после каждого сдвига образованную комбинацию делят на $P(X)$ и проверяют вес остатка. При $w < s$ реализуют действия, указанные в пункте 2, с той лишь разницей, что обратных циклических сдвигов вправо производят столько, сколько сдвигов производили влево.

Пример 2.14. Пусть исходная комбинация $G(X) = 1001$, закодированная с помощью $P(X) = 1011$ и $s=1$, имеет вид $F(X) = 1001110$. При передаче происходит ошибка и в приемник комбинация поступает в виде $F^*(X) = 1101110$. Проверить наличие ошибки и, если она существует, исправить ее.

Задание 5. В приемник поступает комбинация **1101110**. Образующий полином задан в виде двоичной комбинации **1011**. Количество исправляемых ошибок **S=1**. Проверить наличие ошибки и, если она существует, исправить ее. Для проверки использовать оба метода.

Делим комбинацию 1101110 на 1011 и находим, что остаток $R(X) = 111$. Так как $w = 3 > s = 1$, то сдвигаем комбинацию 1101110 циклически на один разряд влево - 1011101. В результате деления этой комбинации на $P(X)$ находим остаток $R(X) = 101$. Вес этого остатка $w = 2 > s = 1$. Осуществляем новый циклический сдвиг влево - 0111011. Деление на $P(X)$ дает остаток $R(X)=001$, вес которого равен s . Суммируем: $0111011+001=0111010$. Теперь производим два циклических сдвига последней комбинации вправо: после первого она принимает вид 0011101, после второго 1001110, т.е. в результате есть исправленная комбинация. Проверка показывает, что эта комбинация делится на $P(X)$ без остатка.

Расчет, построение и анализ исправляющей способности корректирующих кодов»

Теоретический материал

Корректирующий код (также **помехоустойчивый код**) — код, предназначенный для обнаружения и исправления ошибок.

Основная техника — добавление при записи (передаче) в полезные данные специальным образом структурированной избыточной информации (например, контрольного числа), а при чтении (приёме) использование такой избыточной информации для обнаружения и исправления ошибки. Число ошибок, которое можно исправить, ограничено и зависит от конкретного применяемого кода.

Коды обнаружения ошибок (которые могут только установить факт ошибки) принадлежат к тем же классам кодов, что и коды, исправляющие ошибки. Фактически любой код, исправляющий ошибки, может быть также использован для обнаружения ошибок (при этом он будет способен обнаружить большее число ошибок, чем был способен исправить). Коды, исправляющие ошибки, применяются в системах цифровой связи, в том числе: спутниковой, радиорелейной, сотовой, передаче данных по телефонным каналам, а также в системах хранения информации, в том числе магнитных и оптических. Коды, обнаруживающие ошибки, применяются в сетевых протоколах различных уровней.

По способу работы с данными коды, исправляющие ошибки, делятся на блоковые^[1], делящие информацию на фрагменты постоянной длины и обрабатывающие каждый из них в отдельности, и свёрточные^[1], работающие с данными как с непрерывным потоком.

ЗАДАНИЕ

1. Дайте определение понятия «кодирование сообщений». Поясните: какие коды называются «корректирующими». Поясните принципы построения корректирующих кодов.

2. Приведите классификацию корректирующих кодов.

3. Дайте краткую характеристику циклических кодов.

4. На вход декодера поступили кодовые комбинации: $V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5$ циклического кода (7, 4). Определить: число информационных символов k , число проверочных символов r . Обнаружить и исправить ошибки в принятых комбинациях, если таковые имеются. Исходные данные приведены в Таблице 5.

Для нечетных вариантов используется порождающий полином

$G_1 = x^3 + x^2 + 1$, а для четных - порождающий полином $G_2 = x^3 + x^1 + 1$

Таблица 5 – Исходные данные

Номер вариант а	Принятые кодовые комбинации				
	B'_1	B'_2	B'_3	B'_4	B'_5
	1100111	1110011	1000111	0011100	0111001
2	1010101	1100110	1001101	1011010	0010101
3	0011100	0101010	1010111	0110011	1001100
4	1100110	1100100	0010101	1010100	1111100
5	0011111	0101010	1010101	0011011	0111010
6	1110011	1100111	0011011	0111001	0011100
7	1010101	1110100	1011101	1111011	0110011
8	0011010	1100101	0000111	0111001	0110011
9	0111001	0010101	1001100	1111111	0001100
10	1110111	0110011	1100100	1101010	1010101

Методические указания по выполнению задания

Под кодированием понимают преобразование сообщений дискретного источника для передачи их по дискретному каналу. Реализация кодирования на передающей стороне всегда предполагает применение обратной процедуры – декодирования для восстановления принятого сообщения. Устройства, осуществляющие кодирование и декодирование, называются соответственно кодер и декодер.

По своему назначению кодирование подразделяется на примитивное, экономное и помехоустойчивое.

Помехоустойчивое, или избыточное, кодирование применяется для обнаружения и (или) исправления ошибок, возникающих при передаче по дискретному каналу, и, следовательно, такие коды являются корректирующими.

Принцип построения корректирующих кодов заключается в том, что из общего числа возможных кодовых комбинаций M_0 используются только часть комбинаций M_p , $M_p < M_0$. Остальные комбинации являются запрещенными и их появление свидетельствует о возникновении ошибки. Таким образом, любой корректирующий код является кодом с избыточностью.

Исходя из основных параметров и способов кодирования, корректирующие коды можно подразделить на блочные и непрерывные.

В блочных кодах каждому знаку алфавита соответствует кодовая комбинация (блок) из n элементов. Операции кодирования и декодирования в каждом блоке

В непрерывных кодах информационная последовательность не разделяется на блоки, а проверочные символы размещаются определенным образом между информационными символами.

И блоковые, и непрерывные коды могут быть делимыми и неделимыми.

В делимых кодах всегда можно выделить информационные и проверочные символы, а в неделимых – нет.

Делимые коды, в свою очередь, делятся на систематические и несистематические. Систематическими называются коды, у которых сумма «по модулю 2» двух разрешенных кодовых комбинаций снова дает разрешенную комбинацию.

Циклические коды являются блоковыми делимыми кодами. Обозначение «(n , k) – код» указывает на общее количество символов в комбинации - n , информационных символов - k , число проверочных символов r определяется по формуле $r = n - k$.

Циклические коды относятся к систематическим. Они получили название благодаря своему свойству: циклическая перестановка символов разрешенной кодовой комбинации дает снова разрешенную комбинацию. В теории циклических кодов все преобразования производятся в виде математических операций над полиномами (многочленами). В частности, для обнаружения ошибочно принятого символа достаточно разделить полином, представляющий принятую кодовую комбинацию $V(x)$, на порождающий полином $G(x)$. Остаток от деления $R(x)$ будет являться синдромом кода S , который укажет на расположение ошибки в кодовой комбинации. Взаимосвязь между синдромом и искаженным символом приведена в Таблице 6.

Например, принята комбинация циклического кода $V' = 1101111$. Тогда степенной полином, отображающий заданную двоичную комбинацию, будет иметь вид:

$$V'(x) = 1 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x^1 + 1.$$

Если порождающий полином $G_2 = x^3 + x^1 + 1$, то в результате деления получается остаток $R(x) = x^2 + x^1 + 0$, следовательно, синдром кода $S = 110$

Полученное значение синдрома $S = 110$ свидетельствует о том, что ошибка произошла при приеме символа разряда x^4 , и исправленная комбинация будет иметь вид $V_p' = 1111111$.

$$\begin{array}{r}
 \oplus \quad \begin{array}{r} X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + X^1 + 1 \\ X^6 + X^4 + X^3 \\ \hline X^5 + X^4 + X^2 + X^1 + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^3 + X^1 + 1 \\ \hline X^3 + X^2 + X^1 + 1 \end{array} \right. \\
 \oplus \quad \begin{array}{r} X^5 + X^4 + X^2 + X^1 + 1 \\ X^5 + X^3 + X^2 \\ \hline X^4 + X^3 + X^1 + 1 \end{array} \\
 \oplus \quad \begin{array}{r} X^4 + X^3 + X^1 + 1 \\ X^4 + X^2 + X^1 \\ \hline X^3 + X^2 + 1 \end{array} \\
 \oplus \quad \begin{array}{r} X^3 + X^2 + 1 \\ X^3 + X^1 + 1 \\ \hline X^2 + X^1 + 0 \end{array} \\
 R(x) = X^2 + X^1 + 0
 \end{array}$$

Таблица 6 - . Взаимосвязь между синдромом и искаженным символом кода (7,4)

Ошибочный символ	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Синдром при $G_1 = x^3 + x^2 + 1$	110	011	111	101	100	010	001
Синдром при $G_2 = x^3 + x^1 + 1$	101	111	110	011	100	010	001

